

Universidad de San Carlos de Guatemala  
Dirección General de Investigación  
Centro de Investigaciones de Ingeniería

Programa Universitario de Investigación en Ciencias Básicas –PUICB–

Informe Final

**Estudio de Solitones Topológicos en Teoría de Campos**

Juan Adolfo Ponciano Castellanos

10 de enero de 2012

# Índice

<b>1. Resumen</b>	<b>3</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>3. Justificación</b>	<b>7</b>
<b>4. Objetivos</b>	<b>9</b>
4.1. Objetivos Generales . . . . .	9
4.2. Objetivos específicos . . . . .	9
<b>5. Ondas solitarias y solitones</b>	<b>10</b>
5.1. El modelo de sine-Gordon . . . . .	11
<b>6. El kink <math>\mathbb{Z}_2</math></b>	<b>15</b>
6.1. Algunos ejemplos . . . . .	18
6.2. Carga conservada . . . . .	18
<b>7. Condiciones de existencia</b>	<b>19</b>
<b>8. Condiciones de estabilidad</b>	<b>20</b>
8.1. ejemplo: Teorías de campo escalar . . . . .	21
<b>9. El Modelo de Skyrme</b>	<b>22</b>
9.1. Consideraciones geométricas del modelo de Skyrme . . . . .	23
<b>10. Baby Skyrme en presencia de un potencial químico de isoespín</b>	<b>27</b>
10.1. Simetrías en la teoría . . . . .	31
10.1.1. rompimiento $O(3) \rightarrow SO(2)$ . . . . .	32
10.1.2. rompimiento $O(3) \rightarrow SO(2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ . . . . .	32
10.2. Solitones . . . . .	33
<b>11. Conclusiones y Perspectivas</b>	<b>36</b>

<b>A. Densidades bariónicas aproximadas</b>	<b>41</b>
A.1. B=2 . . . . .	42
A.2. B=3 . . . . .	42
<b>B. Código numérico</b>	<b>44</b>

## Índice de figuras

1. Museo Ashmolean de Oxford. Modelos poliédricos en piedra del $\sim 2000$ AC. .	6
2. Fullerenos $C_{60}$ . . . . .	7
3. Multiskyrmions [14] . . . . .	8
4. Onda solitaria viajera . . . . .	11
5. Energía del kink de sine-Gordon . . . . .	13
6. cinta de Möbius . . . . .	14
7. Perfil $F[r, \phi]$ y ángulo $\Phi[r, \phi]$ . . . . .	34
8. Densidad de energía del baby skyrmion B=1, B=2, B=4 . . . . .	35
9. Densidad de energía del baby skyrmion B=1, B=2, B=4 . . . . .	36
10. Densidad de energía del baby skyrmion + $\mu_I$ , sector B=1 . . . . .	36
11. Densidad de energía del baby skyrmion + $\mu_I$ , sector B=3 . . . . .	37
12. Densidad de energía del baby skyrmion + $\mu_I$ , sector B=5 . . . . .	37

## 1. Resumen

Los solitones topológicos juegan papeles importantes en Física Teórica. Las ondas solitarias, o solitones, son soluciones de teorías físicas con dinámica no lineal. Aparecen en numerosos modelos, en áreas tan diversas de Física como la Física de la Materia Condensada, la Física Nuclear, la Cosmología y la Física de Partículas, incluyendo a la Teoría de Cuerdas. Las paredes de dominio o kinks, los vórtices de Ginzburg-Landau, los monopolos y los instantones de Yang-Mills son algunos ejemplos típicos de solitones topológicos en Teoría de Campos. El estudio de estos objetos con propiedades de partículas es un área de intensa actividad y ocupa un lugar sobresaliente en los desarrollos teóricos actuales.

El objetivo del presente estudio fue explorar y caracterizar la existencia de estructuras solitónicas en el contexto de un modelo efectivo de las Interacciones Fuertes construido en el formalismo de la Teoría de Campos, a saber, el Modelo de Skyrme. El objetivo responde tanto a la necesidad de ampliar los métodos y herramientas matemáticas para estudiar los aspectos geométricos de solitones multidimensionales como a la inquietud de explorar descripciones novedosas de la materia y sus interacciones.

Se abordó un problema inédito, relacionado con el modelo modificado de Skyrme en dos dimensiones físicas espaciales que se obtiene formalmente mediante un corte adecuado del espacio físico y del espacio imagen del modelo original de Skyrme. El modelo resultante en 2 dimensiones espaciales es conocido como el modelo de baby Skyrme. El modelo de baby Skyrme reviste interés para los desarrollos teóricos porque es matemáticamente más accesible que el modelo original. Su estudio ha servido como punto de partida para establecer lineamientos y técnicas para abordar el modelo de Skyrme completo. Pero además del interés matemático, el modelo de baby Skyrme es relevante desde el punto de vista físico. Sus estructuras solitónicas, los baby skyrmiones, aparecen en varios sistemas de materia condensada, tales como materiales ferro y antiferromagnéticos y sistemas asociados al efecto Hall cuántico.

En la investigación se consideraron dos grandes líneas de estudio. La primera consistió en responder a la pregunta sobre la existencia de soluciones topológicas estables del modelo de Skyrme en dos dimensiones espaciales en una fase física que desestabiliza el vacío simétrico de la teoría clásica. En una primera etapa se definió la teoría en cuestión, mediante la inclusión de un potencial químico de isospín en el modelo de baby Skyrme original. La segunda línea de trabajo giró en torno a la construcción numérica, en base a las propiedades geométricas de la teoría, de soluciones topológicas encima del vacío asimétrico del modelo propuesto.

La parte central de este documento inicia con una introducción pedagógica al tema, usando modelos sencillos, ideales para discutir las características más relevantes de los solitones topológicos. Se discuten condiciones de existencia y estabilidad de los solitones sobre bases muy generales. Se presenta luego una introducción al modelo de Baby Skyrme en presencia de un potencial químico de isospín, base de la investigación realizada. Se aplican los criterios de existencia y estabilidad al modelo propuesto, obteniéndose argumentos que respaldan la presencia de configuraciones solitónicas con simetrías discretas. Se contrastan las predicciones teóricas con los resultados obtenidos luego de un análisis numérico de las ecuaciones clásicas

de la teoría modificada.

En el ámbito académico, la investigación realizada busca establecer antecedentes para contribuir al desarrollo de la ciencia básica en la Universidad de San Carlos. Con ella se persigue principalmente el fortalecimiento de la investigación teórica para consolidar a mediano y largo plazo núcleos de investigación en un área estratégica y de esta manera actualizar los programas académicos de Física y Matemática de la universidad.

## 2. Introducción

Los solitones topológicos aparecen en muchas teorías clásicas con dinámica no lineal. Por sus propiedades físicas, se eligen como candidatos para representar partículas, abriendo así una ventana para una descripción alternativa de la materia. Estos objetos se han reportado en la literatura científica desde hace unos 170 años. En un inicio, fueron descubiertos en hidrodinámica pero han trascendido a otros dominios de la física abarcando desde sistemas en materia condensada hasta la Física de partículas y Cosmología. Hoy, la lista de fenómenos asociados a ellos es muy extensa [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. En las formulaciones más modernas sobre las partículas elementales y las fuerzas fundamentales de la naturaleza, a saber, Teoría Cuántica de Campos y Teoría de Cuerdas, aparecen solitones de distintos tipos, entre ellos, los vórtices, los monopolos, las paredes de dominio y las branas. Para los físicos de altas energías y de materia condensada el estudio de estos objetos con propiedades de partículas se ha vuelto relevante, alcanzando incluso un primer plano en los desarrollos teóricos.

En este trabajo se analiza y modifica un modelo particular con dinámica no lineal, extraído de la física de las Interacciones Fuertes, cuya versión planar tiene también aplicaciones en sistemas de materia condensada. El modelo en cuestión se conoce como modelo de Skyrme. Se evalúa teóricamente la existencia de solitones topológicos en un escenario particular de dicho modelo y se realiza un análisis numérico para obtener las soluciones.

El modelo de Skyrme provee modelos geométricos de la materia en física nuclear [9]. Sin duda, la idea de Skyrme lleva genialidad en su simpleza y alcance. Por ello, no es casualidad que se haya ganado un lugar en la historia de las construcciones geométricas de partículas [10], sumándose a las investigaciones modernas en esta rama.

La investigación en física de partículas de los últimos 30 años representa el esfuerzo organi-

zado más ambicioso para encontrar respuestas sobre la naturaleza de la materia y la estructura del universo. Sin embargo, todas las civilizaciones han especulado sobre estos temas. Los griegos, por ejemplo, impulsaron ideas muy interesantes al respecto.



Figura 1: Museo Ashmolean de Oxford. Modelos poliédricos en piedra del  $\sim 2000$  AC.

Alrededor del año 400 A.C, Demócrito acuñó la palabra átomo para referirse a elementos indivisibles e inalterables, idénticos en naturaleza pero de distintos tamaños y formas que explican toda variedad de materia. En aquella época se especulaba que habían cinco elementos básicos en la naturaleza: tierra, fuego, aire, agua y éter a los que Platón les asoció propiedades geométricas: el cubo, el tetraedro, el octaedro, el icosaedro y el dodecaedro. Según Platón las partículas elementales de la materia tenían estas formas. A estos se les dio el nombre de sólidos platónicos, aunque hay evidencia de que eran conocidos al menos unos 1000 años antes de Platón por la gente del Neolítico en Escocia [11].

Hoy sabemos que el modelo de Platón es completamente falso, pero de su herencia y de la acumulación de conocimiento científico han surgido ideas prometedoras.

Los poliedros son parte de la naturaleza, aparecen en diversos problemas en física, química (estructuras moleculares como el carbono), biología (estructura de virus como el HIV) y en una variedad de disciplinas más. En química hay estructuras moleculares en forma de poliedros. Por ejemplo, el carbono natural puede existir como grafito, diamante, pero también hay otra forma estable menos conocida, llamada fullereno. Los fullerenos son una jaula de moléculas de carbono, la más conocida es la del  $C_{60}$  cuyo descubrimiento fue premio Nobel de Química en 1996. Los átomos de Carbono ocupan los vértices del poliedro. Otros fullerenos comunes son el  $C_{70}$ ,  $C_{76}$  y  $C_{84}$ , se sabe que existen en el polvo interestelar. En biología, se han descubierto estructuras de virus en forma de poliedro, como el HIV que posee simetría icosaédrica.

En el área de Física de Partículas, el modelo de Skyrme fue el primer modelo de solitones topológicos [12, 13]. Comenzó a utilizarse para describir nucleones en presencia de un mar

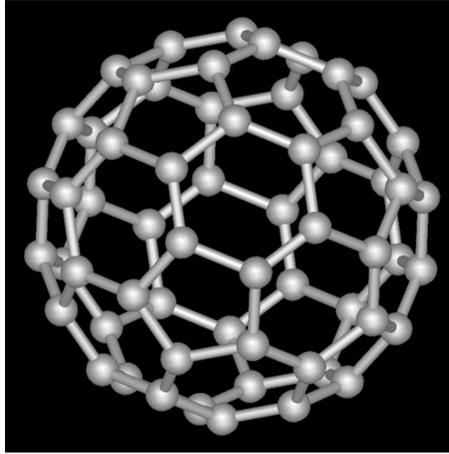


Figura 2: Fulereno  $C_{60}$

de piones. En esta teoría, los nucleones emergen como estados solitónicos que, mediante un proceso de cuantificación semiclásica, adquieren números cuánticos de espín e isospín. Investigaciones más recientes han encontrado relaciones interesantes entre multi-skyrmiones y núcleos atómicos [14, 15]. Notablemente, dichas investigaciones encuentran que las configuraciones de densidad de energía de los multiskyrmiones son poliedros, recordándonos inevitablemente a las partículas elementales de Platón (ver Fig.3).

En este documento se presentan inicialmente las bases y los objetivos de la investigación. Seguidamente se desarrolla una introducción pedagógica al tema, usando modelos muy apropiados para discutir las principales características de los solitones. Luego se discuten aspectos formales relacionados con criterios para definir existencia y estabilidad de los solitones. El documento finaliza con nuestra contribución al estudio de solitones topológicos en modelos tipo Skyrme. Se presenta una introducción general al modelo de Skyrme y luego los resultados de nuestro estudio. El desarrollo en esas líneas es inédito y, creemos, de interés para futuros estudios relacionados con el tema.

### 3. Justificación

Los beneficios principales de nuestro trabajo deben buscarse en aspectos formales tanto desde el punto de vista del conocimiento físico como matemático. Los solitones topológicos

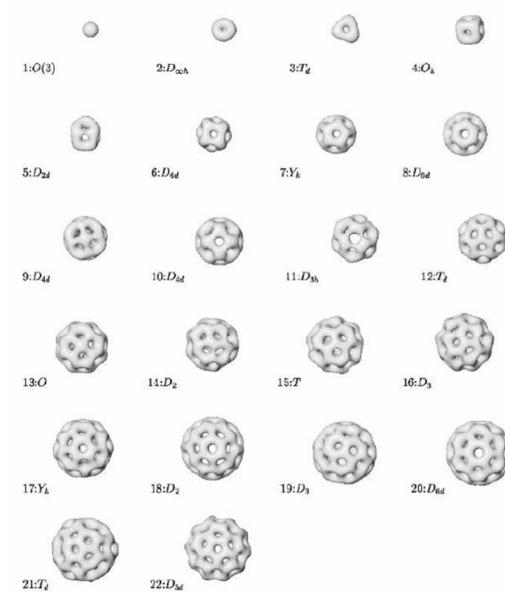


Figura 3: Multiskyrmions [14]

juegan papeles importantes en Física Teórica. En esta investigación se propone trabajar con un modelo efectivo para las Interacciones Fuertes cuyas soluciones solitónicas son candidatas para describir bariones (partículas que interactúan vía Interacción Fuerte). El problema levanta una serie de preguntas teóricas y matemáticas que son interesantes e iluminadoras en sí mismas, tales como la realización de simetrías geométricas y la construcción de configuraciones de campos. Sin embargo el problema es potencialmente importante por motivos programáticos dentro de la Teoría de las Interacciones Fuertes (QCD). Uno de los problemas centrales en la Física Nuclear teórica moderna es el comportamiento de materia hadrónica en condiciones extremas. El modelo de Skyrme captura mucha de la esencia de la QCD y constituye un modelo simplificado para aproximar el comportamiento de la materia hadrónica en dichas condiciones.

El proyecto de investigación es pertinente porque apunta a establecer un camino aproximado para analizar el comportamiento de materia hadrónica en un régimen físico especial.

Los solitones tienen además un valor intrínseco como ejemplos de estructuras geométricas en una, dos o tres dimensiones espaciales. En ese sentido, el estudio de estos objetos se justifica ampliamente porque contribuye a enriquecer las herramientas y los esquemas de análisis que ayudan a describir matemáticamente tales estructuras.

## 4. Objetivos

El objetivo principal de nuestro trabajo es contribuir a la producción de conocimiento científico en el área de Solitones Topológicos. Dentro de él cabe lo siguiente:

### 4.1. Objetivos Generales

La investigación se plantea como una descripción de estructuras solitónicas en teorías de Campos con dinámica no lineal. De forma general, se persigue identificar las propiedades analíticas, geométricas y numéricas de algunos tipos de solitones topológicos con relevancia en la Física de Partículas y de esta manera enriquecer la literatura científica referida al tema a través de publicaciones de los resultados en revistas especializadas.

La propuesta se considera también como un vehículo mediante el cual se busca adquirir habilidades específicas para la resolución de problemas técnicos, tales como el dominio de herramientas matemáticas e informáticas que ayudan a resolver las ecuaciones altamente no lineales que rigen la dinámica de los solitones. Este objetivo conlleva además el interés de proseguir el camino para desarrollar nuevos esquemas de aproximaciones analíticas para describir la dinámica de sistemas de multi-solitones.

### 4.2. Objetivos específicos

Puntualmente, nuestra investigación persigue los siguientes intereses:

- Acoplar un potencial químico de isoespín a la versión planar del modelo de Skyrme.

- Resolver numéricamente las ecuaciones clásicas de movimiento en la fase asimétrica del modelo modificado de Skyrme.
- Determinar representaciones analíticas o aproximaciones analíticas de las soluciones solitónicas del modelo.
- Buscar analogías con el modelo en 3+1 dimensiones.

## 5. Ondas solitarias y solitones

Las ondas solitarias fueron descritas inicialmente por J. Scott Russell en 1834. Mientras cabalgaba a la orilla del canal Unión de Escocia, él observó olas localizadas viajando en el canal sin cambiar de forma y tamaño. Desde el punto de vista matemático, el fenómeno se explica por la cancelación mutua entre efectos dispersivos y efectos no lineales en el medio donde se propaga la onda. Hay varios modelos físicos donde esta cancelación ocurre de manera efectiva, entre ellos, uno de los más conocidos, que además es soluble exactamente, es la ecuación Korteweg de Vries (KdV) [16]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (1)$$

donde  $u(t, x)$  describe la altura de la onda por encima de la superficie del agua;  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes numéricas. Por inspección se puede comprobar que una solución de la ecuación KdV es

$$u(t, x) = \frac{3v}{\alpha} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v}{\beta}} (x - vt) \right] \quad (2)$$

donde  $v$  es una constante de integración que representa la velocidad. La figura 4 muestra una representación del desplazamiento temporal de las soluciones a la ecuación de KdV.

Las ondas solitarias presentan algunas propiedades de partículas: pueden colisionar entre ellas, fundirse y reaparecer un tiempo después. En un contexto físico, la solución de modelos con dinámica no lineal puede describir un paquete con energía localizada que además se propaga sin disipación de energía. Una onda solitaria es llamada solitón si posee propiedades

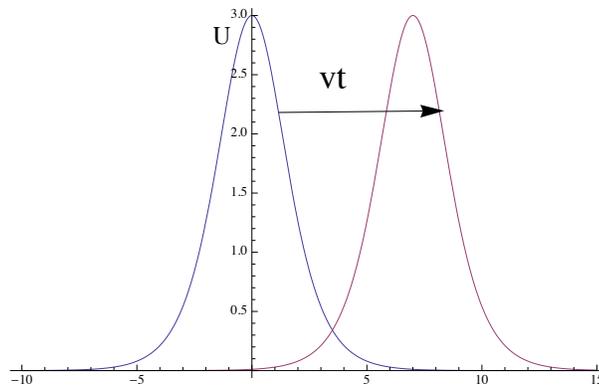


Figura 4: Onda solitaria viajera

de partículas.

Los físicos de altas energías han encontrado que soluciones tipo solitones existen también en teorías de las interacciones fundamentales. Entre estas soluciones están los monopolos, las paredes de dominio, los vórtices, los tubos de flujos magnéticos, algunos candidatos para describir agujeros negros, todos ellos ocupan un lugar importante en la literatura especializada.

## 5.1. El modelo de sine-Gordon

Para introducir el tema en el contexto de una teoría clásica de Campos, discutiremos, a manera de ilustración, el modelo de sine-Gordon en  $1 + 1$  dimensiones que contiene Solitones Topológicos. Los llamados solitones topológicos tienen una propiedad adicional: son solitones que pueden clasificarse según su forma (o topología). Alrededor de los años setentas, los físicos teóricos iniciaron la investigación de solitones topológicos en teorías de campos, interpretando a algunos de ellos como candidatos para representar partículas de la teoría en cuestión. A diferencia de las partículas elementales, que surgen en el formalismo de la Teoría Cuántica de Campos como fluctuaciones cuánticas, las propiedades de los solitones quedan, en buena medida, determinadas por las ecuaciones clásicas de la teoría. El rasgo distintivo de estas nuevas partículas es su estructura topológica que difiere de la configuración de mínima energía de la teoría. Es justamente dicha estructura topológica la responsable de la estabilidad de los solitones.

El modelo de sine-Gordon es accesible desde el punto de vista matemático y es uno de

los pocos modelos en los que se pueden calcular las propiedades de los solitones topológicos rigurosamente. Desde el punto de vista físico, el modelo describe la dinámica de un flujo magnético penetrando paralelamente una juntura Josephson de un superconductor. Aparece también en las descripciones de ciertos fenómenos asociados al efecto Hall cuántico.

El modelo sine-Gordon contiene un campo escalar autointeractuante  $\phi(t, x)$  inmerso en un potencial periódico. La densidad lagrangiana correspondiente es

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar}{2c} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{c\hbar}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{c\hbar}{\lambda^2} (1 - \cos \phi) \quad (3)$$

donde  $\lambda$  es una constante con dimensiones de longitud. El campo  $\phi$  es adimensional. La ecuación clásica, derivada de la densidad lagrangiana anterior, es

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{\lambda^2} \sin \phi = 0 \quad (4)$$

y se conoce como la ecuación de sine-Gordon. La densidad Hamiltoniana del sistema es

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar}{2c} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{c\hbar}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{c\hbar}{\lambda^2} (1 - \cos \phi) \quad (5)$$

cuyo mínimo se obtiene al elegir el campo igual a múltiplos enteros de  $2\pi$

$$\phi = 2\pi n, \quad n = 0, 1, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (6)$$

Todos los términos de  $\mathcal{L}$  son simétricos ante las traslaciones discretas

$$\phi \rightarrow \phi + 2\pi \quad (7)$$

Esta es la simetría de la teoría que, sin embargo, se rompe espontáneamente al elegir un vacío particular de los infinitos vacíos degenerados que posee la teoría.

Nos interesan las soluciones estáticas de la teoría. La condición de soluciones con energía finita, que representan soluciones físicamente aceptables, impone restricciones al comportamiento asintótico del campo.  $\phi(x)$  debe tender asintóticamente a uno de los vacíos clásicos de

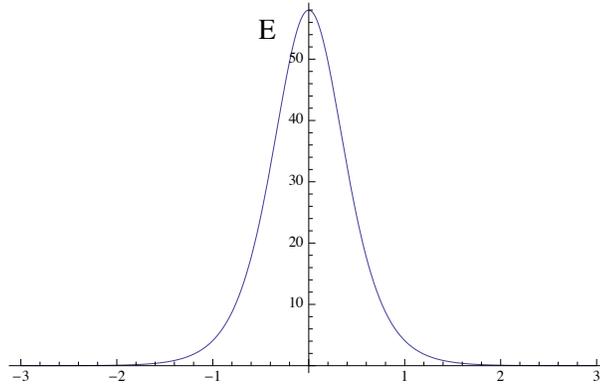


Figura 5: Energía del kink de sine-Gordon

la teoría. Elijamos una configuración que interpola entre dos vacíos de la teoría, por ejemplo

$$\phi(x = -\infty) = 0, \quad \phi(x = \infty) = 2\pi, \quad (8)$$

La expresión analítica exacta de la configuración sujeta a estas condiciones de frontera es

$$\phi(x) = 4 \tan^{-1} \exp\left(\frac{x - x_0}{\lambda}\right) \quad (9)$$

donde  $x_0$  es una constante. Esta solución describe a un solitón con energía localizada alrededor del punto  $x_0$ . La constante  $\lambda$  está relacionada con el tamaño del solitón cuya energía se obtiene al sustituir la expresión anterior en la densidad hamiltoniana e integrando sobre la variable espacial

$$\begin{aligned} E &= c\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\lambda^2} (1 - \cos \phi) \right] \\ &= \frac{8c\hbar}{\lambda} \end{aligned} \quad (10)$$

La configuración es estable por las restricciones impuestas en la frontera. Para realizar una pequeña deformación del campo en el infinito habría que inyectar una cantidad de energía infinita, lo que significa que las soluciones con distintas condiciones de frontera están separadas

por una barrera de potencial infinita y es imposible pasar de una a otra de forma continua.

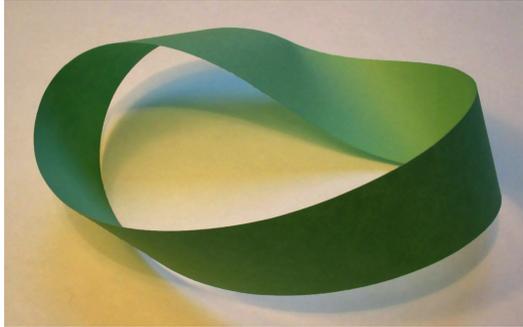


Figura 6: cinta de Möbius

La estabilidad de la configuración puede representarse geoméricamente al identificar al campo  $\phi$  con el ángulo de torsión de una cinta. Podemos imaginarnos una cinta y unir los extremos. Si simplemente unimos un extremo al otro, se formará un cilindro. Por otro lado, si uno de los extremos está girado con respecto del otro se formarán figuras como la cinta de Möbius mostrada en la figura 6. Las dos son claramente distinguibles entre ellas, y es imposible pasar de un patrón al otro sin romper la cinta. Resulta que estas cintas son representaciones geométricas de solitones que surgen en una Teoría definida en una dimensión espacial.

Una solución viajera, con velocidad  $v$ , se obtiene al realizar un boost de Lorentz

$$\phi(x) = 4 \tan^{-1} \exp \left( \frac{x - x_0 - vt}{\lambda \sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) \quad (11)$$

La energía correspondiente de esta onda solitaria es

$$E = \frac{8c\hbar}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (12)$$

Identificando  $mc^2 = 8c\hbar/\lambda$ , la energía de la configuración estática, podemos escribir

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (13)$$

Es muy importante notar que estos objetos están asociados a una corriente topológica

conservada. Para la teoría en cuestión podemos definir la corriente

$$J^\mu(t, x) = \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(t, x) \quad (14)$$

donde  $\epsilon$  es el tensor totalmente antisimétrico. Esta corriente se conserva dado que su tetradi-  
vergencia se anula.

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0 \quad (15)$$

La carga topológica se define a partir de la corriente como

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} J^0 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi(\infty) - \phi(-\infty) \quad (16)$$

que es un entero. La carga  $Q$  clasifica las soluciones en distintos sectores.

## 6. El kink $\mathbb{Z}_2$

Nuestra discusión se centrará en el caso de un lagrangiano  $\mathcal{L}[\phi]$  invariante ante cierto grupo de transformaciones

$$\begin{aligned} \phi &\longrightarrow D(g)\phi = g(\phi) \\ \mathcal{L}[g(\phi)] &= \mathcal{L}[\phi], \end{aligned} \quad (17)$$

donde  $g \in G$ , siendo  $G$  un grupo de simetrías, típicamente un grupo de Lie. Los campos de la teoría, llamados aquí genéricamente  $\phi$ , pueden estar en cualquier representación del grupo.

En teorías físicas son frecuentes las situaciones en las que una simetría del lagrangiano no se manifiesta en el estado del sistema. Se dice entonces que la simetría está rota. Este es un ingrediente fundamental para la existencia de defectos topológicos en la teoría.

Consideraremos un ejemplo básico con estos ingredientes. Se trata de un modelo con un campo escalar real en  $(1+1)D$ . Este es el modelo prototipo de un defecto topológico en  $1D$  espacial. La acción correspondiente es

$$S = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right]. \quad (18)$$

Si, por ejemplo, el potencial  $V$  tiene la forma

$$V = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \eta^2)^2, \quad (19)$$

entonces el modelo posee una simetría  $\mathbb{Z}_2$ . Es una simetría de reflexión ante el intercambio  $\phi \rightarrow -\phi$ .

En Teoría clásica de Campos, la variedad de vacío es sencillamente el espacio de configuraciones del campo  $\phi$  que minimizan la energía. En este ejemplo, la variedad del vacío es doblemente degenerada dada la simetría de reflexión,  $V(\eta) = V(-\eta)$ .

La ecuación de movimiento que se deduce de la acción,

$$\partial_t^2 \phi + \partial_x^2 \phi + \lambda(\phi^2 - \eta^2)\phi = 0 \quad (20)$$

posee las soluciones

$$\phi(t, x) = \pm \eta, \quad (21)$$

que corresponde a soluciones de densidad de energía nula y son llamadas los vacíos triviales de la Teoría.

Una solución cuya densidad de energía es distinta de cero tiene ciertas restricciones impuestas por el requerimiento de energía finita, a saber, el campo debe acercarse asintóticamente a uno de los vacíos de la teoría en el infinito espacial. Siguiendo esta prescripción, consideremos un caso en el cual el campo interpola entre los 2 vacíos de la teoría,

$$\phi(t, -\infty) = -\eta \quad \phi(t, \infty) = \eta. \quad (22)$$

Por continuidad, hay al menos un punto en el eje real,  $x_0$  tal que  $\phi(t, x_0) = 0$ . Esta solución se conoce como "kink  $\mathbb{Z}_2$ ". La energía de este estado es distinta de cero. Además, esta solución no puede colapsar en el vacío trivial. La razón es que para que esto suceda una de las condiciones

de frontera, digamos en  $x \rightarrow \infty$ , tendría que cambiar en una forma continua de  $+\eta$  a  $-\eta$ . Sin embargo, la más leve desviación del campo en  $+\infty$  costaría una cantidad infinita de energía potencial. La situación es análoga a la discutida para el modelo específico de sine-Gordon. En consecuencia, el kink  $\mathbb{Z}_2$  es topológicamente estable.

El argumento fundamental para entender que el espacio de configuraciones del campo se divide en distintas componentes es como sigue. El campo  $\phi$  es una aplicación entre espacios

$$\phi : X \mapsto Y \quad (23)$$

Supongamos que  $\phi$  está en la variedad  $\mathcal{M}$  del vacío,  $\mathbb{Z}_2$ . Denotémosla como  $\phi_\infty \equiv \phi(x = \pm\infty)$ . Entonces  $\phi_\infty$  define una aplicación de  $\pm\infty$  a  $\mathbb{Z}_2$ .

$$\phi_\infty : S^0 \mapsto \mathbb{Z}_2 \quad (24)$$

Dado que la variedad  $\mathcal{M}$  tiene 2 componentes desconectadas, que no pueden ser continuamente deformadas una en la otra, el conjunto de aplicaciones de  $S^0$  a  $\mathcal{M}$  es isomórfico a  $\mathbb{Z}_2$ .

Al conjunto de aplicaciones de  $S^0$  en  $\mathcal{M}$  se lo denota

$$\Pi_0(\mathcal{M}) \quad (25)$$

Cada elemento de  $\Pi_0(\mathcal{M})$  corresponde a una aplicación de  $S^0$  en  $\mathcal{M}$ . Los kinks ocurren si los dominios en  $x = \pm\infty$  son distintos.

De manera general, los campos de una teoría son aplicaciones entre 2 variedades. Un campo  $\phi$  es homotópico a otro  $\psi$  si puede ser continuamente deformado en  $\psi$ . La relación **homotópico a** es una relación de equivalencia: tiene la propiedad de ser simétrica, transitiva y reflexiva de tal manera que las aplicaciones  $\phi$  se clasifican en distintas clases de homotopía. Las aplicaciones pertenecientes a clases distintas serán topológicamente distintas.

En Teoría de Campos hay muchos ejemplos en los cuales  $X$  es  $S^n$ . Es el caso de variedades de grupos de Lie simples. La  $n$ -esfera es el conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^{n+1}$  a una distancia unitaria

del origen.

$$S^n = \left\{ x_i \mid \sum x_i^2 = 1 \right\}. \quad (26)$$

El conjunto de clases de homotopía de aplicaciones  $\phi : S^n \mapsto Y$  se denota  $\Pi_n(Y)$ . Para  $n \geq 1$  el conjunto  $\Pi_n(Y)$  forma un grupo.

## 6.1. Algunos ejemplos

- $\Pi_1(S^2) = I$ . El grupo fundamental  $S^2$  es isomórfico a la identidad. Cualquier mapeo de un lazo en la superficie de una esfera puede deformarse en un punto.
- $\Pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ . Cada aplicación está asociada al número de veces que la imagen de  $S^1$  se enrolla en el espacio blanco. A clases de equivalencia distintas pertenecen configuraciones de campo topológicamente distintas y esto induce una clasificación topológica de las soluciones clásicas en una Teoría de Campos.

## 6.2. Carga conservada

Volvamos al ejemplo del kink e identifiquemos la clase de equivalencia con una carga. Esta es una carga topológica conservada en el tiempo y es la garantía de estabilidad del kink. Es fácil ver que la corriente definida como

$$j^\mu = C \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad \mu, \nu = 0, 1 \quad (27)$$

es una corriente conservada. En efecto,

$$\partial_\mu j^\mu = C \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu \phi \quad (28)$$

de manera que  $j^0$  define una carga conservada a través de la relación

$$Q = \int j^0 dx. \quad (29)$$

Derivando con respecto del tiempo,

$$\frac{dQ}{dt} = \int \partial_0 j^0 dx = \int \partial_1 j^1 dx = 0 \quad (30)$$

donde hemos supuesto que  $j^1 \rightarrow 0$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ . En el caso del kink la carga es

$$\int j^0 dx = Q = C[\phi(x = \infty) - \phi(x = -\infty)] = 1 \quad (31)$$

si  $C = \frac{1}{2\eta}$ .

Es importante entender que la configuración del kink no puede relajarse en una configuración de energía nula (un vacío) porque esta se encuentra en un sector topológico que acarrea una carga distinta. La energía del kink está localizada en una región finita del espacio. Podemos pensar la solución como un paquete de energía que se desplaza sin disipación. Es un candidato para describir una partícula.

## 7. Condiciones de existencia

De este ejemplo se puede intuir que la topología de la variedad del vacío  $\mathcal{M}$  determina la existencia de defectos topológicos. Las propiedades relevantes de la variedad de vacío  $\mathcal{M}$  se estudian en base a Teoría de Homotopía. El grupo  $\Pi_n(\mathcal{M})$  clasifica cualitativamente distintas aplicaciones de la  $S^n$  hacia la variedad  $\mathcal{M}$ . El cálculo de grupos de homotopía es relativamente simple si  $\mathcal{M}$  puede expresarse en términos de grupos de Lie compactos. Esta es una situación común en teorías físicas donde, además, un grupo de Lie compacto  $G$  se rompe espontáneamente en un subgrupo  $H$ ,

$$G \longrightarrow H, \quad H \subset G. \quad (32)$$

Consideremos el Hamiltoniano de una teoría que es invariante ante  $G$

$$\mathcal{H}[\phi] = \mathcal{H}[D(g)\phi], \quad \text{donde } g \in G \quad (33)$$

$\phi^g = D(g)\phi$  representa el campo  $\phi$  después de que este ha sido transformado por la acción de  $g$ . El Hamiltoniano es minimizado cuando  $\phi = \phi_0 \in \mathcal{M}$ . La variedad  $\mathcal{M}$  se genera a partir de  $\phi_0$  por transformaciones de la forma

$$\phi^g = D(g)\phi_0 \quad (34)$$

No todos los elementos del grupo  $G$  mueven  $\phi_0$ . La aplicación de elementos de  $H$  en  $\phi_0$  lo dejan invariante.

$$\phi_0 = D(h)\phi_0, \quad (35)$$

de tal manera que un elemento  $gh \in G$  actuando en  $\phi_0$  da el mismo resultado que  $g$  actuando en  $\phi_0$ .

Los  $\phi_0^g$  distintos forman la variedad  $\mathcal{M}$ . Este es el conjunto de elementos  $\{gh : h \in H\}$ . Esto es, la variedad de vacío  $\mathcal{M}$  es equivalente al espacio de cosets de  $H$  en  $G$ ,

$$\mathcal{M} = G/H. \quad (36)$$

La condición para la existencia de solitones topológicos es que el grupo de homotopía definido por la aplicación del campo  $\phi$ , sea distinto de la identidad. En el caso en que la variedad del grupo  $G$  es la  $n$ -esfera, aparecen distintos sectores topológicos en el espacio de configuraciones del campo si  $\Pi_n(\mathcal{M})$  es no trivial.

## 8. Condiciones de estabilidad

La existencia de distintos sectores topológicos en el espacio de configuraciones no garantiza que haya soluciones de mínima energía en cada uno de ellos. Derrick [18] formuló un teorema de no existencia de solitones estables en una teoría de Campos a partir de las siguientes observaciones:

- Supóngase que  $\psi^\lambda(x)$  es la familia de configuraciones de campos obtenida a partir de  $\psi(x)$  al aplicar el rescaleo espacial  $x \rightarrow \lambda x$ . La variación de la funcional de energía,  $E(\Psi(x))$  para campos estáticos con respecto de un rescaleo espacial siempre es distinta

de cero para cualquier configuración de campo no trivial.

- Por otro lado, una configuración de campo que es un punto estacionario de la energía, debe permanecer estacionario ante cualquier variación, incluyendo rescaleo espacial.

De aquí se desprende el teorema de Derrick:

*Supóngase que para una configuración de campo  $\Psi(x)$ , arbitraria, de energía finita, distinta del vacío, la funcional de energía  $E(\lambda)$  no tiene puntos estacionarios. En tal caso, las ecuaciones de campos de la teoría no admiten soluciones estáticas de energía finita a excepción de la configuración del vacío.*

## 8.1. ejemplo: Teorías de campo escalar

Considérese la teoría general,

$$S = \int d^{n+1}x \left[ \frac{1}{2} \sum_a (\partial_\mu \phi^a)^2 - V(\phi^a) \right] \quad (37)$$

que contiene un número arbitrario de campos escalares  $\phi^a$ . Se supone que el potencial  $V(\phi^a) \geq 0$ . Sea  $\phi_0^a$  una solución estática de las ecuaciones de campo con energía finita dada por

$$E_0^a = \int d^n x \left[ \frac{1}{2} \sum_a (\nabla \phi^a)^2 + V(\phi^a) \right]. \quad (38)$$

Ante un rescaleo espacial que transforma la solución en  $\phi_0^a(x^\mu) \rightarrow \phi_0^a(\lambda x^\mu)$ , la energía rescalea según

$$E_0^a(\lambda) = \int d^n y \left[ \frac{\lambda^{2-n}}{2} \sum_a (\nabla \phi^a(y^\mu))^2 + \frac{1}{\lambda^n} V(\phi^a(y^\mu)) \right] \quad (39)$$

donde  $y^\mu = \lambda x^\mu$ . La funcional de energía  $E_0^a(\lambda)$  tiene la estructura

$$E_0^a(\lambda) = \lambda^{2-n} E_2 + \lambda^{-n} \mathcal{V} \quad (40)$$

para  $n \geq 2$  la funcional de energía  $E_0^a(\lambda)$  no tiene puntos estacionarios. No existe ninguna solución estática  $\phi_0^a$  que sea un extremo de la funcional a menos que  $n = 1$ . En tal caso, los términos  $E_2$  y  $\mathcal{V}$  escanean inversamente garantizando la estabilidad de las soluciones.

## 9. El Modelo de Skyrme

La Cromodinámica Cuántica (QCD) es la Teoría de las Interacciones Fuertes. Desde el punto de vista matemático, la estructura de la QCD es elegante. Sus bases se asientan en el formalismo de la Teoría Cuántica de Campos en donde las partículas surgen como fluctuaciones de campos cuánticos. La QCD es uno de los pilares del Modelo Estándar de la Física de Partículas cuyas predicciones teóricas han sido contrastadas con un alto grado de precisión en los laboratorios de altas energías. La teoría ha tenido un éxito admirable en predecir un gran conjunto de fenómenos que involucran procesos con altos impulsos transferidos. En tal régimen energético, la QCD se vuelve asintóticamente libre [19] y las soluciones se obtienen por aplicación directa de la Teoría de Perturbaciones. Sin embargo, a escalas de energías del orden de 1 GeV, la constante de acoplamiento fuerte crece y los métodos perturbativos dejan de ser confiables [20]. Hasta la fecha se desconoce un tratamiento analítico que conduzca a la descripción exacta del régimen no perturbativo de la QCD. Para obtener descripciones aproximadas de este régimen se recurre a teorías efectivas de la Interacción fuerte. El modelo de Skyrme es una de ellas.

El modelo de Skyrme es una teoría no lineal del campo escalar  $U(t, \mathbf{x})$  en 3+1 dimensiones que admite soluciones topológicas estables, también llamados solitones topológicos o Skyrmions. En su versión original, el campo escalar  $U(t, \mathbf{x})$  toma valores en  $SU(2)$ .

Este modelo tiene la virtud de cifrar las propiedades de escala de la QCD con el número de colores. Es un modelo efectivo que se ha usado para describir aproximadamente propiedades de la QCD. El modelo es esencialmente clásico y por ello es, de lejos, más manejable que teorías de esencia cuántica como la QCD. Al pasar de la descripción clásica a la cuántica, los solitones del modelo de Skyrme son candidatos para describir bariones y núcleos atómicos.

El lagrangiano del modelo  $SU(2)$  de Skyrme con un término cuártico de estabilización y piones de masa finita está dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & -\frac{f_\pi^2}{4}\text{Tr}\{L_\alpha L^\alpha\} + \frac{1}{32e^2}\text{Tr}\{[L_\alpha, L_\beta]^2\} \\ & + \frac{m_\pi^2 f_\pi^2}{4}\text{Tr}\{U + U^\dagger - 2\}.\end{aligned}\quad (41)$$

Los parámetros  $f_\pi$  y  $m_\pi$  se fijan con los valores empíricos de la constante de acoplamiento del pion  $f_\pi^{emp}$  y el valor de la masa del pión  $m_\pi^{emp} = 139 \text{ MeV}$ , respectivamente. La elección estándar del parámetro de Skyrme,  $e = 4,84$ , conduce a los valores empíricos de las masas del nucleón y de  $\Delta$ , luego de usar una aproximación semiclásica para la cuantización del solitón.

Topológicamente, el campo escalar en el modelo de Skyrme define la aplicación

$$U : S^3 \mapsto S^3, \quad (42)$$

que clasifica al espacio de configuraciones en distintos sectores topológicos, indexado cada uno de ellos por un elemento del tercer grupo de homotopía de la  $S^3$ ,  $\Pi_3(S^3) \simeq \mathbb{Z}$ .

La energía estática de Skyrme se descompone en un término cuadrático y un término cuártico en las derivadas del campo escalar. Denotaremos esta descomposición como

$$E = E_2 + E_4. \quad (43)$$

Bajo una transformación de escala del tipo  $\mathbf{x} \rightarrow \lambda \mathbf{x}$ , la energía transforma como

$$E(\lambda) = \frac{1}{\lambda} E_2 + \lambda E_4, \quad (44)$$

indicando que los dos términos transforman de manera inversa. Por esta propiedad, los solitones de la teoría tienen una escala definida y las configuraciones de campos no colapsarán al vacío trivial de la teoría; los solitones del modelo de Skyrme son estables.

## 9.1. Consideraciones geométricas del modelo de Skyrme

Por completitud, presentamos un resumen de las características geométricas del modelo de Skyrme. Se usa como referencia el modelo original en 3 dimensiones espaciales, con un campo

de Skyrme que toma valores en  $SU(2)$ . Los artículos fuente de este resumen se encuentran en las referencias [21].

El modelo de Skyrme en 3 dimensiones espaciales consiste en una aplicación de  $S \equiv \mathbb{R}^3$  en la 3-esfera  $\Sigma \equiv S^3$ . En analogía con una teoría no lineal de elasticidad, la densidad de energía del campo de Skyrme depende de la deformación local asociada con la aplicación anterior.

$$U : \mathbb{R}^3 \mapsto S^3 \quad (45)$$

La funcional de energía es una medida de cuánto la aplicación  $U$  preserva la métrica. Dado que el campo básico,  $U$ , toma valores en  $SU(2)$ , se puede escribir como

$$U(x) = \sigma(x)\mathbf{1} + i\vec{\pi}(x) \cdot \vec{\tau}, \quad (46)$$

siendo  $\tau_\alpha$  las matrices de Pauli. Consideremos ahora una pequeña vecindad de un punto  $p$  en  $\mathbb{R}^3$  y su imagen bajo  $\vec{\pi}$ . La aplicación  $\vec{\pi}$  está representada por funciones

$$\pi^\alpha(p^1, p^2, p^3) \quad (47)$$

Esta es una transformación cuyo jacobiano  $J_{i\alpha} = \frac{\partial \pi^\alpha}{\partial p^i}$ , es una medida de la deformación en el punto  $p$  inducida por la aplicación. La distorsión geométrica no es afectada por las rotaciones.

Llamemos  $O$  y  $\Omega$  a las matrices de rotación en  $p$  y  $\pi(p)$ , respectivamente. El Jacobiano  $J$  transforma según

$$J \rightarrow O^{-1}J\Omega \quad (48)$$

Ante tal transformación, la densidad de energía tendría que ser invariante.

El tensor de esfuerzos se define como

$$D = JJ^\dagger. \quad (49)$$

El tensor  $D$  es simétrico y definido positivo y puede interpretarse como un cuantificador de la deformación inducida por la aplicación  $U$ . La imagen bajo  $U$  de una esfera infinitesimal de radio  $\epsilon$ , centrada en  $\mathbf{x}$  en  $\mathbb{R}^3$  es un elipsoide con ejes principales  $\epsilon\lambda_1$ ,  $\epsilon\lambda_2$ ,  $\epsilon\lambda_3$ , donde

$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$  son los autovalores de  $D$ .

Bajo la transformación ortogonal  $O$ , el tensor  $D$  transforma en

$$D \rightarrow O^\dagger D O. \quad (50)$$

Los invariantes de  $D$  son funciones de los autovalores de  $D$ , simétricas ante permutaciones. Los invariantes son

$$\begin{aligned} \text{Tr} D &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ \frac{1}{2}(\text{Tr} D)^2 - \frac{1}{2}\text{Tr} D^2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2, \\ \det D &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (51)$$

La densidad de energía en el punto  $p$  es función de estos invariantes. La elección más simple es

$$E_2 = \int d^3x \sqrt{\det t} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \quad (52)$$

donde  $t$ , en la medida de integración, es la métrica de  $\mathbb{R}^3$ . La aplicación produce una distorsión sólo si el tensor de esfuerzos es distinto de la matriz unidad. La distorsión inducida por la aplicación es entonces caracterizada por cuánto los autovalores del tensor de esfuerzos difieren de la unidad.

En un sistema de coordenadas arbitrario, la matriz de deformación es

$$J_{m\mu} = e_m^i (\partial_i \pi^\alpha) \xi_{\mu\alpha} \quad (53)$$

donde  $e_m^i$  y  $\xi_{\mu\alpha}$  son vectores base ortonormales de los espacios de partida e imagen, respectivamente.

La expresión  $E_2$  tiene densidad de energía cuadrática en las derivadas. El significado geométrico de la aplicación puede entenderse notando que la transformación de los vectores base

$e_m^i$  bajo  $\vec{\pi}$  es

$$e_m^i \longrightarrow e_m^i \partial_i \pi^\alpha \quad (54)$$

cuyas longitudes cuadradas son

$$\sum_{\alpha, \beta} e_m^i \partial_i \pi^\alpha e_m^j \partial_j \pi^\beta \tau_{\alpha\beta} \quad (55)$$

donde  $\tau$  es la métrica del espacio imagen.

Al sumar esta última expresión en el subíndice  $m$ , se obtiene  $E_2$ . En consecuencia,  $E_2$  mide el cambio de las longitudes cuadradas de vectores base de un marco de referencia ortonormal, bajo la aplicación  $U$ .

La expresión  $E_2$  corresponde a la elección más simple para la energía. Pero es posible agregarle términos de grado superior en los autovalores. La contribución cuártica a la energía es

$$E_4 = \int d^3x \sqrt{\det t} (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2) \quad (56)$$

Consideremos el elemento de área en  $\Sigma$  :  $\epsilon^{qmn} e_m^i e_n^j$ . El área transforma bajo  $\vec{\pi}$  en elementos de área en  $\Sigma$

$$\epsilon_{qmn} e_m^i e_n^j \partial_i \pi^\alpha \partial_j \pi^\beta \quad (57)$$

La suma de los cuadrados de estos elementos de área es proporcional al término conocido como de Skyrme.  $E_4$  es también una medida de la distorsión angular de la aplicación. La suma de las contribuciones cuadráticas y cuárticas proporciona una distorsión muy simétrica producida por  $\vec{\pi}$ . Esta suma puede reescribirse como

$$E = \int (\lambda_1 - \lambda_2 \lambda_3)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3 \lambda_1)^2 + (\lambda_3 - \lambda_1 \lambda_2)^2 + 6 \int \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \quad (58)$$

donde, por simplicidad, no hemos escrito la medida de integración.

Localmente, el  $\det J$  transforma la medida de integración en  $S$  en la medida de integración en  $\Sigma$  y

$$\int_S \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = Vol(\Sigma) deg(\pi) \quad (59)$$

donde  $deg(\pi)$  es el grado de la aplicación. Refiriéndonos a la expresión de la energía  $E$ , el valor máximo que puede adquirir la energía está dado por

$$E \geq 6 deg(\pi) Vol(\Sigma) \quad (60)$$

El límite inferior se alcanza cuando  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ , lo cual corresponde a una isometría. En el modelo de Skyrme este límite no se alcanza jamás dado que  $\mathbb{R}^3$  no es isométrico a  $S^3$ .

La discusión anterior es una interpretación de la teoría del modelo de Skyrme como una teoría elástica no lineal. El grado en que la aplicación se aparta de una isometría se refleja directamente en el acotamiento inferior de la energía. Este resultado debería también caracterizar una aproximación analítica de las soluciones solitónicas.

## 10. Baby Skyrme en presencia de un potencial químico de isoespín

Las excitaciones topológicas del campo de piones en el modelo de Skyrme, se corresponden, en 2 dimensiones espaciales, con los llamados baby skyrmiones. El modelo de Skyrme en 2 dimensiones espaciales, conocido como el modelo de baby Skyrme, es matemáticamente más accesible que el modelo original. Su estudio ha servido como punto de partida para establecer lineamientos y técnicas para abordar el modelo de Skyrme completo. Pero además del interés matemático, el modelo de baby Skyrme es relevante desde el punto de vista físico. Los baby skyrmiones aparecen en varios sistemas de materia condensada, tales como materiales ferro y antiferromagnéticos [22, 23, 24] y sistemas asociados al efecto Hall cuántico [25, 26, 27]. En ese contexto hemos decidido estudiar excitaciones topológicas en el modelo de baby Skyrme en presencia de un vacío no perturbativo. Los resultados de esta sección son absolutamente

originales. Hasta donde sabemos, este es el primer trabajo que intenta evaluar la existencia de excitaciones topológicas en el modelo de baby Skyrme en una fase asimétrica. Estudios relacionados con nuestra investigación pueden encontrarse en las referencias [28, 29, 30, 31].

Antes de iniciar con la construcción del modelo en presencia de un potencial químico de isoespín, describiremos el modelo de baby Skyrme original.

Empezamos considerando el Lagrangiano tipo Skyrme en dos dimensiones espaciales

$$\mathcal{L} = -\frac{F^2}{4}\text{Tr}\{L_\alpha L^\alpha\} + \frac{K^2}{16}\text{Tr}\{[L_\alpha, L_\beta]^2\} - \frac{m^2}{2}\text{Tr}\{\mathbf{1} + i\tau_3 U\}, \quad (61)$$

en donde  $U \in SU(2)$  y el operador de Maurier-Cartan  $L_\alpha$  está definido por  $L_\alpha = U^\dagger \partial_\alpha U$ .

En esta sección, nosotros estudiaremos las excitaciones topológicas en el Modelo de baby-Skyrme sobre un vacío distinto al vacío perturbativo del modelo.

El modelo de Baby Skyrme se obtiene a partir de la densidad lagrangiana (61) al restringir el campo de Skyrme a una esfera ecuatorial del espacio blanco  $SU(2)$ . En la formulación de Baby Skyrme, el campo básico es un vector real 3 componentes  $\vec{\Phi} \equiv (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$  que satisface la ligadura  $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 1$ . El campo de Skyrme restringido asociado es  $U = i\vec{\Phi} \cdot \vec{\tau}$ .

El campo  $\vec{\Phi}$  está definido en el espacio de Minkowski tridimensional  $\mathbb{M}^3$ . Junto con la restricción  $\vec{\Phi} \cdot \vec{\Phi} = 1$ , el campo define una aplicación desde el espacio físico hacia el espacio del campo

$$\vec{\Phi}(t, x_1, x_2) : \mathbb{M}^3 \mapsto S^2. \quad (62)$$

La variedad blanco  $S^2$  es la 2-esfera de radio unitario.

Sustituyendo el campo de Skyrme restringido dentro de la densidad lagrangiana (61), se obtiene la densidad lagrangiana del modelo de Baby Skyrme

$$\mathcal{L} = \frac{F^2}{2}\partial_\mu \vec{\Phi} \cdot \partial^\mu \vec{\Phi} - \frac{K^2}{2}\left\{(\partial_\mu \vec{\Phi} \cdot \partial^\mu \vec{\Phi})^2 - (\partial_\mu \vec{\Phi} \cdot \partial_\nu \vec{\Phi})(\partial^\mu \vec{\Phi} \cdot \partial^\nu \vec{\Phi})\right\} - m^2(1 - \Phi_3), \quad (63)$$

o equivalentemente,

$$\mathcal{L} = \frac{F^2}{2} \partial_\mu \vec{\Phi} \cdot \partial^\mu \vec{\Phi} - \frac{K^2}{2} |\partial_\mu \vec{\Phi} \times \partial_\nu \vec{\Phi}|^2 - m^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{\Phi}), \quad (64)$$

Las soluciones clásicas de este modelo han sido estudiadas en la Ref.[32, 33, 34]. El requerimiento de soluciones de energía finita impone el comportamiento asintótico

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \vec{\Phi}(\vec{x}) = \vec{n}. \quad (65)$$

En consecuencia, el campo  $\vec{\Phi}$  a tiempo fijo puede considerarse como una aplicación desde el espacio compactificado  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  hacia  $S^2$ , con lo cual topológicamente, el campo define una aplicación

$$\vec{\Phi}(x_1, x_2) : S^2 \mapsto S^2. \quad (66)$$

Tal configuración puede entonces ser considerada como distintiva de una clase de homotopía en  $\pi_2(S^2)$ , indexada por un grado topológico entero

$$N = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \vec{\Phi} \cdot \partial_1 \vec{\Phi} \times \partial_2 \vec{\Phi}. \quad (67)$$

La estabilidad de las configuraciones de campo en cada sector topológico está asegurada por el compromiso entre los distintos términos de la densidad lagrangiana que escalan de forma opuesta.

El modelo de baby Skyrme es invariante ante el grupo de simetrías

$$G = E_2 \times SO(2) \times P. \quad (68)$$

Aquí,  $SO(2)$  es el grupo que actúa en  $S^2$  dejando  $\vec{n}$  fijo y  $P$  es una reflexión combinada en espacio y espacio blanco  $S^2$ , a saber,

$$P : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, -x_2) \text{ y } (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \mapsto (\Phi_1, -\Phi_2, \Phi_3)$$

Partiendo de esta base, analizamos la inclusión de un potencial químico de isoespín  $\mu_I$ .

El acoplamiento de  $\mu_I$  modifica la estructura del vacío dando lugar a un regimen donde es energéticamente favorable condensar excitaciones de campo de masa  $m$ . Este regimen se manifiesta cuando  $\mu_I \geq m$ . Estamos interesados en estudiar la existencia de solitones topológicos encima del nuevo vacío.

El acoplamiento del potencial químico de isoespín al modelo de baby Skyrme copia el acoplamiento de un campo de gauge isovectorial  $U(1)$ . Se introduce en la densidad lagrangiana (61) mediante la sustitución

$$\partial_\alpha U \longrightarrow \partial_\alpha U - i \frac{\mu_I}{2} [\tau_3, U] g_{\alpha 0}, \quad (69)$$

donde  $\tau_3$  es la tercera matriz de Pauli. Con esta sustitución la densidad lagrangiana del modelo original se transforma en

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{F^2}{4} \text{Tr} \{L_\alpha L^\alpha\} + \frac{K^2}{16} \text{Tr} \{[L_\alpha, L_\beta]^2\} + i \frac{m^2}{2} \text{Tr} \{\tau_3 U\} \\ & + \frac{i\mu_I F^2}{4} \text{Tr} \{w L_0\} - \frac{i\mu_I K^2}{4} \text{Tr} \{w L_\alpha [L_0, L_\alpha]\} \\ & + \frac{\mu_I^2 F^2}{16} \text{Tr} \{w^2\} - \frac{\mu_I^2 K^2}{32} \text{Tr} \{[w, L_i]^2\} \end{aligned} \quad (70)$$

con  $w = U^\dagger \tau_3 U - \tau_3$ . La configuración de campo que minimiza a la energía se ve afectada por la inclusión de  $\mu_I$ . Con el fin de obtener la energía de vacío del campo de Skyrme, estudiamos el potencial efectivo

$$V = -\frac{F^2}{16} \mu_I^2 \text{Tr} \{1 - \tau_3 U \tau_3 U^\dagger\} + i \frac{m^2}{2} \text{Tr} \{\tau_3 U\}. \quad (71)$$

El primer término en (71) disminuye la energía si  $U$  se encuentra alineado en dirección de  $\tau_1$  o  $\tau_2$ , mientras que el segundo término favorece la dirección  $\tau_3$ .

Las configuraciones que minimizan la energía se encuentran usando un ansatz que permite una rotación general entre las direcciones  $\tau_3$  y  $\tau_1$  o  $\tau_2$ . Proponemos el ansatz para el vacío

$$U_0 = i\{\tau_3 \cos \alpha + \sin \alpha (\tau_1 \cos \Phi_0 + \tau_2 \sin \Phi_0)\}, \quad (72)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo que parametriza la rotación entre las direcciones mencionadas.

Al sustituir el ansatz en (71) se encuentra que el mínimo ocurre en  $\alpha = 0$  en la fase donde  $\mu_I < m$  y  $\cos \alpha = \frac{m^2}{F^2 \mu_I^2}$  en la fase donde  $|\mu_I| > m$ .

La energía de la solución estática de mínima energía se encuentra al minimizar

$$M(\mu_I) = M_0 - \frac{1}{2} \Lambda \mu_I^2, \quad (73)$$

donde

$$M_0 = - \int d^2x \left[ \frac{F^2}{4} \text{Tr} \{L_i L_i\} + \frac{K^2}{16} \text{Tr} \{[L_i, L_j]^2\} - i \frac{m^2}{2} \text{Tr} \{\tau_3 \cdot (U - U|_{vac})\} \right], \quad (74)$$

y

$$\Lambda = \frac{1}{8} \int d^2x \left[ \left( F^2 \text{Tr} \{\omega^2 - \omega^2|_{vac}\} + \frac{K^2}{4} \text{Tr} \{[\omega, L_i]^2\} \right) \right] \quad (75)$$

## 10.1. Simetrías en la teoría

El modelo de Baby Skyrme hereda la simetría  $O(3)$  del modelo sigma lineal en donde el espacio imagen es la 2-esfera unitaria  $\mathcal{S}^2$ . La simetría  $O(3)$  se refiere a la simetría global del espacio imagen  $\mathcal{S}^2$ , correspondiente a rotaciones

$$\vec{\Phi} \mapsto M \vec{\Phi}, \quad (76)$$

donde  $M \in O(3)$  es una matriz constante.

La expresión de la energía de las soluciones solitónicas clásicas, derivada del modelo de Baby Skyrme dependen únicamente de la tercera componente de  $\vec{\Phi}$ , es decir,  $\phi_3$ , con lo cual la simetría remanente es  $O(2)$ , entre  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . Tal como hemos apuntado anteriormente, y como muestran claramente nuestros resultados numéricos que mostraremos más adelante, las configuraciones de campos de mínima energía tienen simetrías discretas ( $\mathbb{Z}_2$  o subgrupos de esta).

### 10.1.1. rompimiento $O(3) \rightarrow SO(2)$

La secuencia de la ruptura de simetría en la teoría es la siguiente

$$O(3) \longrightarrow SO(2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \quad (77)$$

Dado que  $G \equiv O(3)$  actúa transitivamente en  $S^2$  y  $H \equiv SO(2)$  es el subgrupo invariante de un punto  $\in S^2$ , entonces el grupo cociente  $G/H$  es isomórfico a  $S^2$ ,

$$O(3)/SO(2) = G/H \simeq S^2 \quad (78)$$

El resultado del segundo grupo de homotopía de  $G/H$  es  $\mathbb{Z}$ , implicando que las soluciones del modelo de Baby Skyrme original están clasificadas por enteros.

### 10.1.2. rompimiento $O(3) \rightarrow SO(2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$

Recordamos que dado un grupo  $H$  en un espacio  $G$ , podemos formar el espacio cociente de  $G$ ,  $G/H$ , en donde cada punto  $g$  es identificado con todas sus imágenes  $h(g)$ , a medida que  $h$  varía sobre  $H$ . Los puntos de  $G/H$  son órbitas  $Hg = \{h(g)|h \in H\}$  en  $G$ , y  $G/H$  se conoce como el espacio órbita. Por ejemplo, para un espacio cobertor normal  $\tilde{X} \rightarrow X$ , el espacio órbita  $\tilde{X}/H(\tilde{X})$  es simplemente  $X$ .

Para obtener el grupo de homotopía del espacio cociente  $(O(3)/SO(2))/\mathbb{Z}_2$ , que corresponde al modelo de nuestro interés, nos apoyaremos de la siguiente proposición, cuya demostración puede encontrarse en [35]:

**Proposición I:** Si la acción de un grupo  $H$  en el espacio  $G$  es tal que cada  $g \in G$  tiene una vecindad  $U$  cuyas imágenes  $h(U)$  para  $h \in H$  son disjuntas, entonces

- el mapa cociente  $p : G \rightarrow G/H$ ,  $p(g) = Hg$ , es un espacio cobertor normal,
- $H$  es isomórfico a  $\Pi_1(G/H)/p(\Pi_1(G))$ , si  $G$  es conexo y localmente conexo.

El espacio cociente  $X = O(3)/SO(2)$  es el cobertor normal, y además doble cobertor de  $(O(3)/SO(2))/\mathbb{Z}_2$ . El grupo  $\Pi_1(X)$  es isomórfico al grupo de transformaciones cobertoras  $\mathbb{Z}_2$ .

Del uso de esta proposición, se encuentra entonces que

$$\Pi_2((O(3)/SO(2))/\mathbb{Z}_2) \simeq \Pi_2((O(3)/SO(2))) \simeq \mathbb{Z} \quad (79)$$

Este resultado clasifica a las soluciones del modelo cuya secuencia de ruptura de simetría es la que aparece en (77). El espacio de soluciones está caracterizado por un entero, que es un invariante topológico.

## 10.2. Solitones

La solución del modelo de Baby Skyrme en el sector topológico  $n = 1$  es bien conocida [32, 33]. Hemos implementado un código numérico que calcula esta solución al usar el valor  $\mu_I = 0$  para el potencial químico de isospín (ver anexo). Al buscar una solución general del tipo

$$U = i \sum_{j=1}^3 \{\tau_j \Phi_j\}, \quad (80)$$

con

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \sin[F[r, \phi]] \cos[n\Phi[r, \phi]], \\ \Phi_2 &= \sin[F[r, \phi]] \sin[n\Phi[r, \phi]] \\ \Phi_3 &= \cos[F(r, \phi)] \end{aligned} \quad (81)$$

se encuentra que la solución tiene simetría axial. El número entero  $n$  corresponde a la carga topológica de la solución. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{1}{r} \partial_r \frac{\partial(rM)}{\partial(\frac{\partial M}{\partial F_r})} + \partial_\phi \frac{\partial M}{\partial(\frac{\partial M}{\partial F_\phi})} - \frac{\partial M}{\partial F} = 0, \quad (82)$$

mientras que para  $\Phi(r, \phi)$  la ecuación es

$$\frac{1}{r} \partial_r \frac{\partial(rM)}{\partial(\frac{\partial M}{\partial \Phi_r})} + \partial_\phi \frac{\partial M}{\partial(\frac{\partial M}{\partial \Phi_\phi})} - \frac{\partial M}{\partial \Phi} = 0. \quad (83)$$

donde  $M$  está dado por la expresión (73).

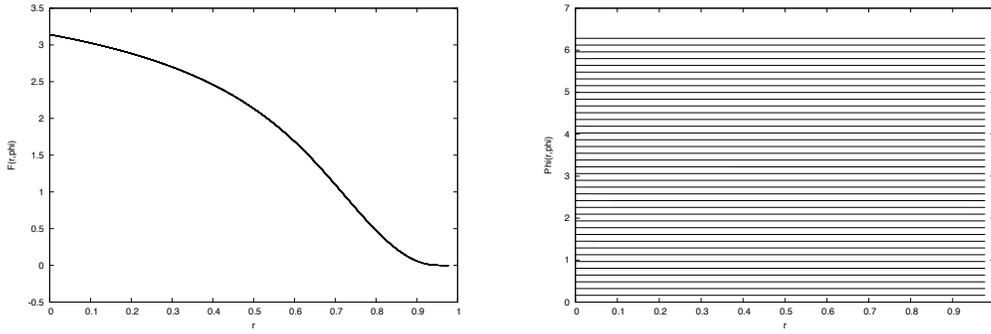


Figura 7: Perfil  $F[r, \phi]$  y ángulo  $\Phi[r, \phi]$

En las figura 7 se muestran los gráficos de las funciones  $F[r, \phi]$  y  $\Phi[r, \phi]$ , que satisfacen las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \phi} \Big|_{\phi=0} &= 0, & \frac{\partial F}{\partial \phi} \Big|_{\phi=2\pi} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0, & \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=\infty} &= 0, \\ \Phi(r, 0) &= 2\pi, & \Phi(r, 2\pi) &= 2\pi, \\ F(0, \phi) &= \pi, & F(\infty, \phi) &= 0. \end{aligned} \quad (84)$$

Las funciones  $F[r, \phi]$  y  $\Phi[r, \phi]$  son independientes en la variable angular  $\phi$ ; esto refleja la simetría axial de la solución. Por la discusión anterior, nuestra suposición es que el caso  $\mu_I \neq 0$  no siga este comportamiento.

En la integración numérica de las ecuaciones de movimiento se ha compactificado el dominio de la variable radial, transformándola en una variable compactificada con dominio de 0

a 1. La transformación realizada es

$$r \longrightarrow \frac{r}{1+r}. \quad (85)$$

En el anexo se muestra el código numérico implementado para resolver el problema.

Usando los resultados es posible también graficar el diagrama de la densidad de energía del baby Skyrmion (ver figuras 8 y 9).

En el caso de  $\mu_I \neq 0$ , la elección de un vacío particular deja intacta únicamente la simetría  $\mathbb{Z}_2$  del grupo  $SO(2)$  original. Se parte de la hipótesis que las soluciones en cada sector topológico, de ser estables, reflejan este rompimiento de simetría. Las soluciones sólo pueden tener la simetría completa de la teoría o un subgrupo de estas. Ya que no se vislumbra un método para resolver exactamente este sistema de ecuaciones no lineales, una manera de comprobar esta hipótesis es evaluar numéricamente las ecuaciones de Euler-Lagrange.

La figura 10 muestra el resultado de un análisis numérico de las ecuaciones cuando se grafican diagramas de nivel para las densidades de carga topológica de las soluciones en el sector  $N = 2$  y  $N = 4$ . Mediante el código numérico implementado, se ha calculado, dado un sector topológico, la densidad de energía de la solución, la densidad de número topológico, la energía total y la contribución a la energía correspondiente a los términos originados por el potencial químico de isoespín. En ellas se aprecian simetrías discretas en las soluciones.

En este caso, la variedad del vacío presenta una simetría  $U(1)$  que se rompe espontáneamente al elegir un ángulo de rotación,  $\Phi_0$ , entre las direcciones  $\tau_1$  y  $\tau_2$  del espacio de isoespín. El parámetro  $\Phi_0$  al que hacemos referencia es el ángulo que aparece en las configuraciones de mínima energía (72). Hay también enfoques alternativos que queremos abordar en las próximas etapas de la investigación. El principal de ellos es buscar aproximaciones analí-

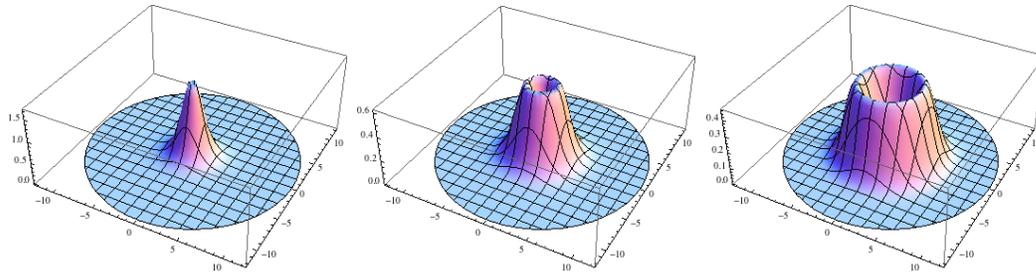


Figura 8: Densidad de energía del baby skyrmion B=1, B=2, B=4

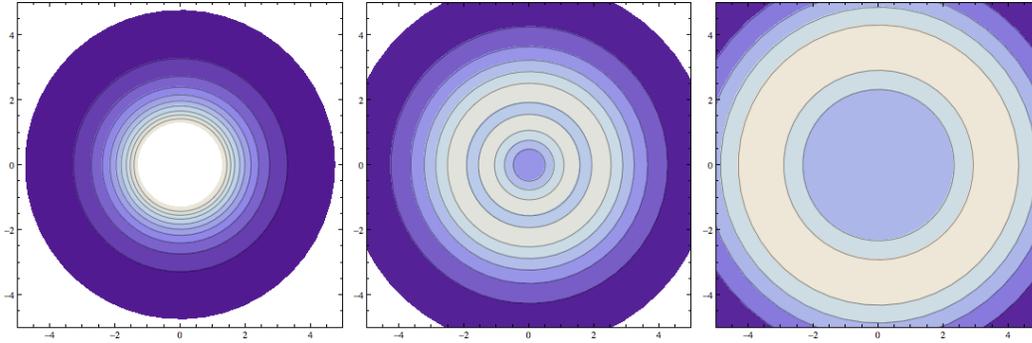


Figura 9: Densidad de energía del baby skyrmion B=1, B=2, B=4

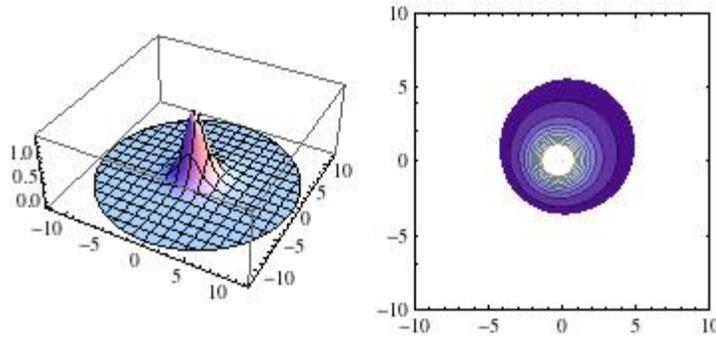


Figura 10: Densidad de energía del baby skyrmion +  $\mu_I$ , sector B=1

ticas de las soluciones buscadas. Estas soluciones deben incorporar las simetrías discretas del modelo. El camino a seguir tendrá que iniciar con un estudio detallado de las simetrías de las configuraciones de campo.

## 11. Conclusiones y Perspectivas

En el modelo de baby Skyrme dotado de un potencial químico de isoespín, se ha estudiado el regimen en el cual el potencial químico es mayor a la masa  $m$  correspondiente al campo escalar de la teoría. Se observó que la inclusión del potencial químico de isoespín no modifica las condiciones necesarias para evadir el teorema de Derrick, con lo cual, de existir, las soluciones en cada sector topológico deben ser estables. Se derivó además que el segundo grupo de

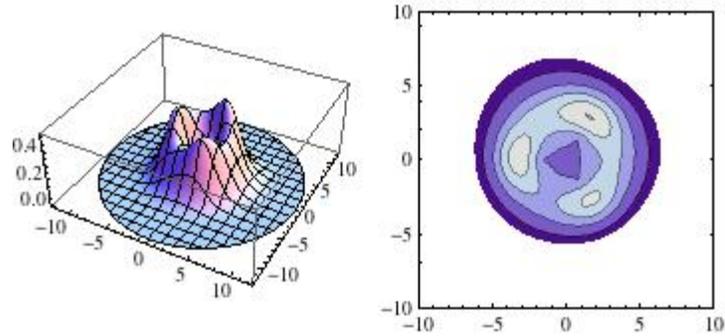


Figura 11: Densidad de energía del baby skyrmion +  $\mu_I$ , sector B=3

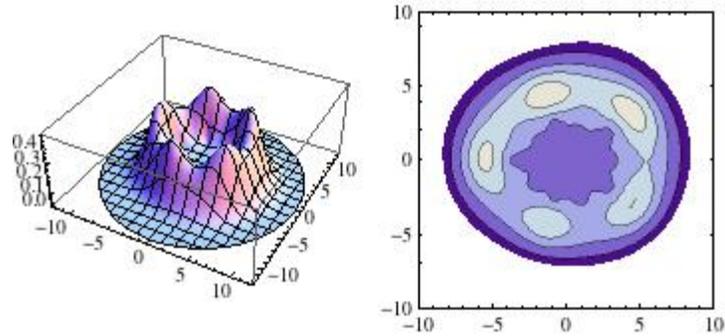


Figura 12: Densidad de energía del baby skyrmion +  $\mu_I$ , sector B=5

homotopía de la variedad de vacío es isomórfico al grupo de los enteros  $\mathbb{Z}$ . De acuerdo con este análisis teórico, existen solitones topológicos estables en el modelo en cuestión. El fenómeno es comparable al reportado por otros autores en donde la simetría rotacional de multiskyrmiones en rotación se rompe espontáneamente. Sin embargo, nuestra construcción evidencia claramente que la ruptura de simetría de la variedad de vacío se traslada a las configuraciones no triviales.

Para corroborar la predicción teórica, se realizó el análisis numérico de las ecuaciones clásicas derivadas del modelo de baby Skyrme en presencia de un potencial químico de isoespín. Se buscó la presencia de solitones en la fase asimétrica de la teoría. Los resultados numéricos reflejan la ruptura de la simetría, como resultado de la presencia de un vacío asimétrico.

El código numérico implementado ha permitido encontrar soluciones para distintos sectores topológicos.

Los resultados de esta investigación identifican al modelo de baby Skyrme como un modelo simplificado relevante para el estudio del modelo completo de Skyrme en una fase donde el vacío perturbativo es reemplazado por un condensado de piones. La maquinaria analítica implementada en el modelo bidimensional motiva y además sienta las bases para la construcción de técnicas aproximadas en  $(3 + 1)$  dimensiones. Otra posible línea de trabajo es el estudio de fuerzas intersolíticas en la nueva fase asimétrica. Este estudio ha sido realizado para el modelo de baby Skyrme y podría trasladarse al modelo modificado. Por último, es necesario investigar si este modelo puede adaptarse para el estudio de algunos sistemas de materia condensada.

## Referencias

- [1] R. Rajaraman, Solitons and Instantons, Amsterdam: North Holland (1982) 409pp.
- [2] C. Rebbi and G. Soliani, Solitons and Particles, Singapore: World Scientific (1984) 836pp.
- [3] A. Vilenkin and E.P.S. Shellard, Cosmic Strings and Other Topological Defects, Cambridge: Cambridge University Press (1985) 517pp.
- [4] M. B. Hindmarsh and T.W.B. Kibble, Cosmic Strings, Rep. Prog. Phys, 58 (1995) 477.
- [5] N. Manton and P. Sutcliffe, Topological Solitons, Cambridge University Press (2004) 493pp.
- [6] D. Tong, TASI Lectures on Solitons, hep-th/0509216 (2005).
- [7] M. Shifman, A. Yung, Supersymmetric Solitons, Cambridge: Cambridge University Press (2009) 259pp.
- [8] Y. M. Cho, Reinterpretation of Faddeev-Niemi Knot in Skyrme Theory, arXiv:nucl-th/0309051
- [9] M. Atiyah, N. S. Manton, B. J. Schroers, Geometric Models of Matter, arXiv:1108.5151
- [10] Gerald E. Brown, Manton Rho, The multifaceted Skyrmion, Singapore: World Scientific (2010) 438pp.
- [11] Michael Atiyah, Paul Sutcliffe, Polyhedra in physics, chemistry and geometry, arXiv: math-ph/0303071
- [12] T.H.R. Skyrme, A nonlinear field theory, Proc. R. Soc. Lond. A260 (1961) 127.
- [13] T.H.R. Skyrme, Particle states of a quantized meson field, Proc. R. Soc. Lond. A262 (1961) 237.
- [14] R.A. Battye and P.M. Sutcliffe, Solitonic fullerene structures in light atomic nuclei, Phys. Rev. Lett. 86 (2001) 3989; Skyrmions, fullerenes and rational maps, Rev. Math. Phys. 14 (2002) 29.

- [15] S.Krusch, Homotopy of rational maps and the quantization of Skyrmions, *Ann. Phys.* 304, (2003) 103.
- [16] Zyun F. Ezawa, *Quantum Hall Effects*, Singapore: World Scientific, 2008
- [17] T. Vachaspati, *Kinks and Domain Walls*, Cambridge: Cambridge University Press (2006) 176pp.
- [18] G.H. Derrick, Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles, *J. Math. Phys.* 5 (1964) 1252.
- [19] D.J.Gross and F.Wilczek, Ultraviolet behaviour of nonabelian Gauge theories, *Phys. Rev. Lett.* 30 (1973) 1343; H.D. Politzer, Reliable perturbative results for Strong Interactions?, *Phys. Rev. Lett.* 30 (1973) 1343.
- [20] J.B.Kogut, M.A.Stephanov, D. Toublan, J.J.M. Verbaarschot, A. Zhitnitsky, QCD-like theories at finite baryon density, *Nucl. Phys.* B582 (2000) 477.
- [21] N.S. Manton, Geometry of Skyrmions, *Commun. Math. Phys.* 111 (1987) 469.
- [22] X.Y.Zu, Y. Onose, N.Kanazawa, J.H. Park, J. H. Han, Y. Matsui, N. Nagaosa and Y. Tokura, *Nature* 465 (2010) 901.
- [23] W.Münzer, A. Neubauer, T. Adams, S. Mühlbauer, C. Franz, F. Jonietz, R. Georgii, P. Böni, B. Pedersen, M. Schmidt, et al., *Phys. Rev. B* 81 (2010) 041203.
- [24] M. Ezawa, *Phys. Lett. A* 375 (2011) 3610.
- [25] F.Wilczek and A. Zee, Linking numbers, spin and statistics of solitons, *Phys. Rev. Lett.* 51 (1983) 2250.
- [26] S.E.Barret, G.Dabbagh, L.N. Pfeiffer, K. W. West and R. Tycko, Optical pum of NMR evidence for finite size skyrmions in GaAs Quantum Wells near Landau level filling  $\nu=1$ , *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995) 5112.
- [27] N. R. Walet and T. Weidig, Full two-dimensional numerical study of the quantum-Hall Skyrme crystal, arXiv:cond-mat/0106157.

- [28] J. Jäykkä and M. Speight, Easy plane baby skyrmions, Phys. Rev. D 82 (2010) 125030.
- [29] C. Adam, T. Romańczukiewicz, J. Sánchez-Guillén and A. Wereszczyński, Investigation of restricted baby Skyrme models, Phys. Rev. D 81 (2010) 085007.
- [30] D. Foster and P. Sutcliffe, Baby Skyrmions stabilized by vector mesons, Phys. Rev. D 79 (2009) 125026.
- [31] I. Hen, M. Karliner, Spontaneous breaking of rotational symmetry in rotating solitons: a toy model of excited nucleons with high angular momentum, Phys. Rev. D 77 (2008) 116002.
- [32] B.M.A.G. Piette, B.J. Schroers and W.J. Zakrzewski Multisolitons in a two-dimensional Skyrme model, Z. Phys. C65 (1995) 165.
- [33] B.M.A.G. Piette, B.J. Schroers and W.J. Zakrzewski, Dynamics of baby Skyrmions, Nucl. Phys. B439 (1995) 205.
- [34] B. Piette, W.J. Zakrzewski, Shrinking of solitons in the (2+1)-dimensional  $S^2$  sigma model, Nonlinearity 9 (1996) 897.
- [35] A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge: Cambridge University Press (2002) 550pp.
- [36] Theodor Brocker, Tammo tom Dieck, Representations of Compact Lie Groups, Springer Verlag (1985) 316pp.
- [37] Zhong-Qi Ma, Group Theory for Physicists, World Scientific, 2007

## A. Densidades bariónicas aproximadas

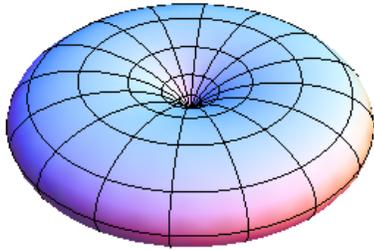
Este código calcula la densidad de carga topológica de skyrmiones usando la aproximación de los mapeos racionales y gráfica superficies de densidad de carga topológica constante

## A.1. B=2

```

z:=Tan[θ/2] * Exp[i * φ]
R[x_] = x^2;
n1 = Simplify[ComplexExpand[2Re[R[z]]/(1 + R[z] * Conjugate[R[z]])]];
n2 = Simplify[ComplexExpand[2Im[R[z]]/(1 + R[z] * Conjugate[R[z]])]];
n3 =
Simplify[
ComplexExpand[(1 - R[z] * Conjugate[R[z]])/(1 + R[z] * Conjugate[R[z]])]];
Φ = FullSimplify[{n1, n2, n3}];
Bdens =
FullSimplify[
1/Sin[θ] *
Sum[
Φ[[i]] * Sum[Sum[Signature[{i, j, k}] * D[Φ[[j]], θ] * D[Φ[[k]], φ],
{j, 1, 3}], {k, 1, 3}], {i, 1, 3}]];
SphericalPlot3D[Bdens, {θ, 0, Pi}, {φ, 0, 2Pi}, Axes → None,
Boxed → False]

```



## A.2. B=3

```

R[x_] = (Sqrt[3] * i * x^2 - 1)/x/(x^2 - Sqrt[3] * i);
n1 = Simplify[ComplexExpand[2Re[R[z]]/(1 + R[z] * Conjugate[R[z]])]];
n2 = Simplify[ComplexExpand[2Im[R[z]]/(1 + R[z] * Conjugate[R[z]])]];

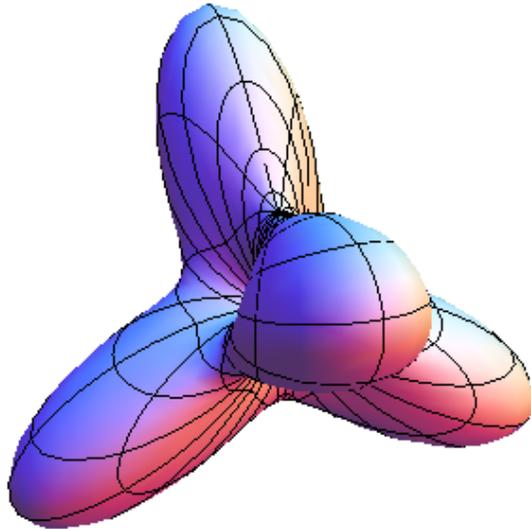
```

```

n3 =
Simplify[
ComplexExpand[(1 - R[z] * Conjugate[R[z]])/(1 + R[z] * Conjugate[R[z]])];
Phi = FullSimplify[{n1, n2, n3}];
FullSimplify[
1/Sin[theta] *
Sum[
Phi[[i]] * Sum[Sum[Signature[{i, j, k}] * D[Phi[[j]], theta] * D[Phi[[k]], phi],
{j, 1, 3}], {k, 1, 3}], {i, 1, 3}];
SphericalPlot3D[
(3(25380864 + 38564788Cos[theta] + 23664256Cos[2theta] + 11116235Cos[3theta] +
7546048Cos[4theta] + 4200215Cos[5theta] + 1990720Cos[6theta] +
689198Cos[7theta] + 193024Cos[8theta] - 16962Cos[9theta] - 46784Cos[10theta] -
26415Cos[11theta] - 7872Cos[12theta] - 1107Cos[13theta] +
8(545280 + 861342Cos[theta] + 1451520Cos[2theta] + 1136836Cos[3theta] +
691200Cos[4theta] + 361332Cos[5theta] + 178688Cos[6theta] +
63153Cos[7theta] + 16896Cos[8theta] + 2169Cos[9theta])Cos[4phi]Sin[theta]^4 -
2304(640 + 58Cos[theta] + 576Cos[2theta] + 73Cos[3theta] + 64Cos[4theta] - 3Cos[5theta])
Cos[8phi]Sin[theta]^8 - 18432Cos[theta]Cos[12phi]Sin[theta]^12 +
16*sqrt(3)(-1665068 - 2601550Cos[theta] - 1648172Cos[2theta] -
732658Cos[3theta] - 376752Cos[4theta] - 107697Cos[5theta] + 82Cos[6theta] +
26289Cos[7theta] + 17884Cos[8theta] + 7469Cos[9theta] + 2010Cos[10theta] +
275Cos[11theta])Sin[theta]^2Sin[2phi] -
128*sqrt(3)(32028 + 32913Cos[theta] + 39622Cos[2theta] + 17571Cos[3theta] +
9412Cos[4theta] + 2681Cos[5theta] + 858Cos[6theta] + 83Cos[7theta])
Sin[theta]^6Sin[6phi] - 6144*sqrt(3)(-10 + 21Cos[theta] - 6Cos[2theta] + 3Cos[3theta])
Sin[theta]^10Sin[10phi]))/
(2
(192 + 122Cos[theta] + 64Cos[2theta] + 9Cos[3theta] - 3Cos[5theta] +
48Cos[theta]Cos[4phi]Sin[theta]^4 +
16*sqrt(3)(-2 + 7Cos[theta] + 2Cos[2theta] + Cos[3theta])Sin[theta]^2Sin[2phi]^3),

```

$\{\theta, 0, \pi\}, \{\phi, 0, 2\pi\}, \text{Axes} \rightarrow \text{None}, \text{Boxed} \rightarrow \text{False}$



## B. Código numérico

La siguiente subrutina se incluye en el programa principal FORSIM de M.B Carver y D.G. Stewart, para resolver las ecuaciones clásicas para el problema de baby-Skyrme + potencial químico.

```
C SU(2) SKYRME MODEL
C AXIAL SYMMETRIC ANSATZ
C
      SUBROUTINE UPDATE
C
C SECTION 1: COMMUNICATION COMMON BLOCKS
C
COMMON/RESERV/T,DT,DTOUT,EMAX,TFIN /CNTROL/INOUT
. /INTEGT/U(20,30),V(20,30)
. /DERIVT/UT(20,30),VT(20,30)
. /PARTX/NCUPX,NX,XL,XU,AUX,AUXX,NEQDX,DX,X(20)
. /PARTY/NCUPY,NY,YL,YU,AUY,AUYY,NEQDY,DY,Y(30)
COMMON/GAUSS/GC(25),GS(25),GW(25),GP(25,25),GM(25).IGAUSS
DIMENSION BCA(4),BCD(4),BCL(4),BCM(4),BCB(4),BCN(4),
```

```

, BXU(4,2,30),BXV(4,2,30),BYU(4,2,20),BYV(4,2,20),
, UX(20,30),UXX(20,30),UY(20,30),UYY(20,30),UXY(20,30),
, VX(20,30),VXX(20,30),VY(20,30),VYY(20,30),VXY(20,30),
, STORE(20,30),BDENS(20,30),EDENS(20,30),XINERTM1(20,30)
DIMENSION XINERT1(20,30),XINERT3(20,30),XINERTJ1(20,30),
, EDENSMU(20,30)

      LOGICAL AUX,AUXX,AUY,AUYY,NEQDX,NEQDY
DATA BCD/1.,0.,0.,0./,BCL/10.,1.,0.,0./,BCB/1.,0.,-1.,0./
, BCA/0.,1.,0.,0./,BCM/ 0.,1.,0.,0./,BCN/0.,1.,0.1,0./
C
open(6,file='babyaxial.txt',status='unknown')
open(61,file='edensity.txt',status='unknown')
open(66,file='results.txt',status='unknown')

      IF(T.NE.0)GOTO4

      C
C SECTION 2: INITIAL CONDITIONS
C
dtout=1.0
tfin=80.0

      C
C PARAMETERS
C
if(iflag.ne.1)then
write(*,*)' NON EQUIDISTANT THETA MESH (.TRUE.,.FALSE.) '
read(*,*)NEQDY
if(neqdy)then
write(*,*)' SCALE FOR THETA MESH [0,inf] '
read(*,*)SCALE
else
write(*,*)' THETA MESH [YL,PI/2] (YL=0.0) '
read(*,*)YL
endif
endif
iflag=1

      XU=12.
MW=1.
NW=4.
NW2=NW*NW
xn=NW
PHI0=3.*4.0*ATAN(1.0)/2.
PIM=SQRT(0.1)
PIM2=PIM*PIM
xm=PIM
xm2=PIM2
XMU=1.05*PIM
XMU2=XMU*XMU
X2=1./2. ! X2=1/2,1,2 for integration between (0,2PI), (0,PI), (0,PI/2)
XCONV=197.33
ALPH=ACOS(PIM2/XMU2)
SB=SIN(ALPH)
CB=COS(ALPH)
S2B=2*SB*CB
C2B=CB*CB-SB*SB
C
C MESH POINTS
C
NX=20
NY=30
PI=4.0*ATAN(1.0)

```

```

YU=PI/X2 ! X2=1/2, 1,2 for integration between (0,2PI), (0,PI), (0,PI/2)
C
C MESH FOR THETA ANGLE
C
HX=XU/(NX-1.0)
IF(NEQDY)THEN
CALL GAUSSP(NY,GC,GW,GP,25,3)
DO20 J=1,NY
CT=GC(J)/(SCALE+(1.0-SCALE)*GC(J))
GW(J)=GW(J)*SCALE/(SCALE+(1.0-SCALE)*GC(J))**2
Y(J)=ACOS(CT)
GS(J)=SQRT(1.0-CT*CT)
20 GC(J)=CT
ELSE
HY=(YU-YL)/(NY-1.0)
DO21 J=1,NY
Y(J)=YL+(J-1)* HY
CT=COS(Y(J))
ST=SIN(Y(J))
C ST=SQRT(1.0-CT*CT)
GS(J)=ST
GC(J)=CT
21 GW(J)=ST*HY
GW(1)=0.5*GW(1)
GW(NY)=0.5*GW(NY)
ENDIF
C
C INITIAL CONDITION
C
DO22 J=1,NY
V(1,J) =Y(J)
DO22 I=1,NX
R=(I-1)*HX
U(I,J)=MW*PI/(1.0+EXP(R-.2*XU))
c V(I,J)=YU*(Y(J)/YU)**4*(Y(J)-YL)/(YU-YL)
V(I,J)=Y(J)
22 CONTINUE
C
C
C SECTION 3: BOUNDARY CONDITIONS
C BCA: F=0 BCD: DF=0 BCB: DF=BCB(3)
C BCL: X*DF+F=0 BCM: F=BCM(3) BCN: F =BCN(3)
C
BCL(1)=XU
zpi=pim*xu
if(nw.eq.1)then
bcl(2)=zpi+(2.0+zpi)/(1.0+zpi)
else
znw1=(nw-1)*nw*(nw+1)*(nw+2)
znw2=nw*(nw+1)
bcl(2)=zpi+(3.0*znw1+8.0*znw2*zpi+8.0*zpi*zpi)/
. ( znw1+4.0*znw2*zpi+8.0*zpi*zpi)
endif
BCN(3)=MW*PI
BCM(3)=YU
DO30 K=1,4
DO31 I=1,NX
!integration between 0 and 2PI
BYU(K,1,I)=BCD(K) ! DtF(R,YL)=0
BYU(K,2,I)=BCD(K) ! DtF(R,YU)=0
BYV(K,2,I)=BCM(K) ! THETA(R,YU)=PI
31 BYV(K,1,I)=BCA(K) ! THETA(R,0)=0
DO32 J=1,NY
BXU(K,1,J)=BCN(K) ! F(0,theta) =PI

```

```

BXU(K,2,J)=BCA(K) ! F(XU,theta)=0
BXV(K,1,J)=BCD(K) ! drTHETA(0,theta)=0
32 BXV(K,2,J)=BCD(K) ! drTHETA(XU,theta)=0
30 CONTINUE
C
C SECTION 4: EQUATION STATEMENTS
C
4 CONTINUE
C
CALL PARTTWO(NX,NY,U,UT,UX,UXX,UY,UYX,BXU,BYU,STORE)
CALL PARTTWO(NX,NY,V,VT,VX,VXX,VY,VYX,BXV,BYV,STORE)
CALL PARDYX(NY,NX,UY,UXY)
CALL PARDYX(NY,NX,VY,VXY)
C
DO40 I=2,NX-1
DO40 J=2,NY-1
C
R=X(I)
R2=R*R
ST=GS(J)
CT=GC(J)
COT=CT/ST
ST2=ST*ST
C
F =U(I,J)
FR =UX(I,J)
FRR=UXX(I,J)
FRT=UXY(I,J)
FT =UY(I,J)
FTT=UYX(I,J)
H =V(I,J)
HR =VX(I,J)
HRR=VXX(I,J)
HRT=VXY(I,J)
HT =VY(I,J)
HTT=VYX(I,J)
C
SF=SIN(F)
CF=COS(F)
SF2=SF*SF
SCF=SF*CF
C2F=CF*CF-SF*SF
S2F=SIN(2.0*F)
SH=SIN(H)
CH=COS(H)
sxnH=sin(xn*h)
cxnH=cos(xn*h)
s2xnH=sin(2*xn*h)
c2xnH=cos(2*xn*h)
c2a=cb**2-sb**2
s2a=2.0*sb*cb
C
C Equations with isospin chemical potential
C
UT(I,J)=(8*Ht**2*sf*(cf*(-1 + Fr**2)*r + (-Fr + Frr*r)*sf)*xn**2 +
- 8*Ht*sf*(-2*Frt*Hr + Fr*Hrt)*r*sf +
- Ft*(-(Hrr*r*sf) + Hr*(-2*cf*Fr*r + sf)))*xn**2 +
- r*(8*Frr*r**2 + r**2*
- (-8*cb*sf*xm2 +
- s2f*(1 + 3*c2a - 2*c2xnH*sb**2)*xmu**2 +
- 4*cxnH*(2*cf*sb*xm2 - c2f*s2a*xmu**2)) +
- 4*Hr*(Hr*(Ft**2 - r**2)*s2f + 2*Ft*Hrt*sf**2)*xn**2 +
- 8*Ftt*(1 + Hr**2*sf**2*xn**2) +
- 8*Fr*(r - Hr*Htt*sf**2*xn**2))/8.

```

```

C
VT(I,J)=(xn*(-4*Ft**2*(Hr - Hrr*r)*sf**2*xn -
- 4*Ft*sf*((-Frt*Hr) + 2*Fr*Hrt)*r*sf +
- Ht*(-2*cf*r - Fr*sf + Frr*r*sf))*xn +
- r*(-4*r**2*sb*sf*sxnh*xm2 +
- r**2*s2xnh*sf**2*xmu**2 -
- c2a*r**2*s2xnh*sf**2*xmu**2 +
- r**2*s2a*s2f*sxnh*xmu**2 + 4*Fr*Frt*Ht*sf**2*xn +
- 4*(1 + Fr**2)*Htt*sf**2*xn + 4*Hrr*r**2*sf**2*xn +
- 4*Hr*sf*(r*sf + Fr*(2*cf*r**2 - Ftt*sf))*xn))/4.
C
40 CONTINUE
CALL PARTOF(NX,NY,U,UT)
CALL PARTOF(NX,NY,V,VT)
C SECTION 5: PRINTOUT
C
IF(INOUT.NE.1)RETURN
WRITE(6,*)T,DT
C
WRITE(6,*) ' CHIRAL ANGLE F(R,THETA) '
WRITE(6,*)
WRITE(6,501)(X(I),I=1,NX)
WRITE(6,*)
DO 51 J=1,NY
51 WRITE(6,500)Y(J),(U(I,J),I=1,NX)

500 FORMAT(F6.2,2X,30F6.3)
501 FORMAT(8X,30F6.3)
WRITE(6,*)
C
WRITE(6,*) ' ANGLE A(R,THETA) '
WRITE(6,*)
WRITE(6,501)(X(I),I=1,NX)
WRITE(6,*)
DO 52 J=1,NY
52 WRITE(6,500)Y(J),(V(I,J),I=1,NX)
WRITE(6,*)
WRITE(6,*)
C
C SECTION 6: MASS AND BARYON NUMBER
C
DO60 I=1,NX
DO60 J=1,NY
C
R=X(I)
R2=R*R
ST=GS(J)
CT=GC(J)
COT=CT/ST
COT2=COT*COT
ST2=ST*ST
C
F =U(I,J)
FR =UX(I,J)
FRR=UXX(I,J)
FRT=UXY(I,J)
FT =UY(I,J)
FTT=UYX(I,J)
A =V(I,J)
AR = VX(I,J)
ARR= VXX(I,J)
ART= VXY(I,J)
AT = VY(I,J)
ATT= VYY(I,J)

```

```

C
SF=SIN(F)
CF=COS(F)
SF2=SF*SF
SCF=SF*CF
CF2=CF*CF
SA=SIN(A)
CA=COS(A)
SA2=SA*SA
CA2=CA*CA
SCA=SA*CA
CPA=COS(PHI0-A)
SPA=SIN(PHI0-A)
C
FAM=FR*AT-AR*FT
C
if(st.eq.0)then
SADST=AT
SA2DST2=AT*AT
else
SADST=SA/ST
SA2DST2=SADST*SADST
endif
C
if(r.eq.0)then
SF2DR2=FR*FR
DFDF=FR*FR+FRT*FRT
DADA=AR*AR+ART*ART
DFDA=FR*AR+FRT*ART
else
SF2DR2=SF2/R2
DFDF=FR*FR+FT*FT/R2
DADA=AR*AR+AT*AT/R2
DFDA=FR*AR+FT*AT/R2
endif
C
EDENS(I,J)=0.5*DFDF+0.5*(SF2*DADA)
. +0.5*SF2DR2*(FAM*FAM)
. +PIM2*(CB*(1-CF)-SB*SF*COS(A-PHI0))
BDENS(I,J)=-0.25/PI*SF*FAM
XINERTI3(I,J)= 5.-C2B*(1.+3.*(CF2-SF2))-(CF2-SF2)
. -4.*CPA*SB*SB*SF2-4*S2B*CPA*2.*SCF
. +4.*(C2B-1)

      XINERTI3(I,J)= XINERTI3(I,J)+1./4.
. *(32.*(CF*CPA*SB-CB*SF)**2*DFDF
. +32.*SB*SB*SF2*SPA*SPA*DADA
. +16.*SB*(SB*2.*SCF*2.*SPA*CPA-4.*CB*SF2*SPA)*DFDA)
EDENSMU(I,J)=EDENS(I,J)-XMU2/16.*XINERTI3(I,J)
60 CONTINUE
C
WRITE(6,*)' ENERGY DENSITY M(R,THETA) '
WRITE(6,*)

WRITE(6,501)(X(I),I=1,NX)
WRITE(6,*)
DO 61 J=1,NY
61 WRITE(6,500)Y(J),(EDENS(I,J),I=1,NX)

WRITE(6,*)
C
WRITE(6,*)' BARYON DENSITY B(R,THETA) '
WRITE(6,*)

```

```

WRITE(6,501)(X(I),I=1,NX)
WRITE(6,*)
DO 62 J=1,NY
62 WRITE(6,500)Y(J),(BDENS(I,J),I=1,NX)

WRITE(6,*)

IF(T.EQ.30.) THEN
DO 63 I=1,NX
DO 63 J=1,NY
63 WRITE(61,505)X(I)*COS(Y(J)),X(I)*SIN(Y(J)),EDENS(I,J)
ENDIF

```

```
505 FORMAT(3f12.5)
```

```
C
```

```
C
```

```
EGY=0.0
```

```
BAR=0.0
```

```
EGYMU=0.0
```

```
XI3=0.0
```

```
C SIN3=0.0
```

```
DO 64 I=1,NX
```

```
DO 64 J=1,NY-1
```

```
SIN3=SIN3+GS(J)*GS(J)*GW(J)/NX
```

```
VOL=X2*2.0*PI*GW(J)*X(I)*X(I)*HX
```

```
AREA=1.0*X(I)*HX*HY
```

```
EGY=EGY+EDENS(I,J)*AREA
```

```
BAR=BAR+BDENS(I,J)*1.0*HX*HY
```

```
EGYMU=EGYMU+EDENSMU(I,J)*AREA
```

```
64 XI3=XI3+1./8.*XINERTI3(I,J)*AREA
```

```
WRITE(6,*) ' SOLITON MASS (Mo) ',EGY/2/PI
```

```
WRITE(6,*) ' EGYMU', EGYMU/2/PI
```

```
WRITE(6,*) ' BARYON NUMBER ', BAR
```

```
WRITE(6,*) ' INERTIAI ',XI3
```

```
WRITE(6,*) ' SIN3', SIN3
```

```
C
```

```
C
```

```
write(66,506) T, BAR, EGY, EGYMU, XI3
```

```
506 format(F3.0,F6.3,3F9.3)
```

```
C
```

```
C
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
C
```