UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Dirección General de Investigación

PRESENTACIÓN DE INFORME FINAL PRELIMINAR DE PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

ASPECTOS GENERALES

A. Unidad Académica responsable: Facultad de Ingeniería.

B. **Unidad de Investigación:** Centro de Investigaciones de la Facultad de Ingeniería**.**

C. **Nombre del proyecto de Investigación**: "Concepciones que poseen los estudiantes de pre-cálculo y cálculo de la Facultad de Ingeniería, acerca del concepto de función".

D. **Ubicación programática**: Programa de Investigación en Educación.

Línea (s) de investigación: Educación Superior. Diversidad metodológica y tecnológica de la enseñanza aprendizaje.

E. **Equipo de Investigación:**

- **Coordinadora del proyecto**
  Licda. Mayra Virginia Castillo Montes.

- **Investigadores asociados**
  Lic. William Adolfo Polanco.
  Ing. Edwin Adalberto Bracamonte Orozco.

- **Investigadores contratados**
  Ing. Renato Giovanni Ponciano Sandoval.
  Ing. Carlos Alfredo Angulo Huergo.

- **Auxiliares de investigación**
  Br. Pedro Fernando Morales Almazán.
  Br. Sergio Silverio Mérida Molina.

F. **Fecha de realización:** marzo a diciembre de 2005.

INDICE GENERAL

I. RESUMEN

El estudio realizado se abordó desde la perspectiva de la Teoría de sistemas y puede clasificarse como predominantemente cualitativo de tipo descriptivo e interpretativo. Para la construcción del marco teórico y del marco metodológico se tomaron elementos de la Didáctica de la Matemática y se fundamentó en resultados de investigaciones específicas acerca del tema, realizadas en Latinoamérica y en los países anglosajones.

La investigación buscaba fundamentalmente describir las concepciones que poseen los estudiantes de pre-cálculo y cálculo de la Facultad de Ingeniería (cursos Matemática Básica 1, Matemática Básica 2, Matemática Intermedia 1 y Matemática Intermedia 2), acerca del concepto de función. Dichas concepciones se infirieron de las respuestas dadas por los estudiantes a situaciones propuestas, correspondientes a los diferentes dominios cognitivos del concepto. Además, se buscaba identificar las concepciones que están asociadas con aspectos de tipo epistemológico y aquellas que se vinculan con el tratamiento didáctico del tema en los programas de los cursos y en los libros de texto.

A los datos se les aplicó un análisis factorial y análisis de cluster, en busca de establecer correspondencia entre las variables en estudio y la distribución de las agrupaciones que presentaron como conglomerados, tanto clasificados por curso como en la muestra total.

Los resultados obtenidos evidencian que a pesar de que el concepto de función es estudiado al menos en cuatro cursos diferentes, las concepciones que de él elaboran los estudiantes son locales e incompletas, descubriéndose dificultades para transitar entre sus diferentes dominios de representación. Esto significa que el concepto de función no evoluciona de acuerdo con lo esperado, en el tránsito de los estudiantes por los cursos analizados. Además, se hizo evidente que la utilización del concepto de función en la modelación y solución de problemas es uno de los dominios cognitivos más pobres del concepto.

Estos resultados serán de utilidad en la Facultad de Ingeniería en la revisión curricular de los cursos mencionados, diseño de materiales de apoyo, propuesta de estrategias didácticas que permitan superar los obstáculos de aprendizaje detectados y para el diseño de las pruebas específicas de matemática que se realizan a los estudiantes aspirantes a ingresar a la facultad. También los profesionales del SUN encargados de elaborar las pruebas de conocimientos generales de matemáticas, contarán con información importante acerca de los aspectos más importantes a evaluar respecto al tema de funciones. Por otra parte, los profesionales del Programa de Educación a Distancia que impulsa la Dirección General de Docencia de la USAC, obtendrán valiosa información para el diseño de materiales de apoyo para el área de matemática. Finalmente, la investigación proporciona directrices que permiten mejorar la educación matemática que reciben tanto los estudiantes de los primeros años del nivel superior, como los alumnos de los últimos años del nivel medio, con lo cual se contribuye a elevar la calidad de la educación científica en el país.

II INTRODUCCION

El concepto de función es uno de los más importantes conceptos matemáticos estudiados en los niveles medio y superior, en los cursos de pre-cálculo, cálculo y diversas aplicaciones en otras áreas como la física, la estadística, la química, la economía y otras ciencias sociales.

Su naturaleza unificante y su gran potencial como herramienta modeladora de fenómenos de diferente índole, hace que pueda considerarse como la piedra fundamental no sólo de la formación matemática que reciben los estudiantes de las diversas carreras impartidas en la Facultad de Ingeniería, sino de cualquier carrera del nivel superior.

Paralelamente a su importancia, matemáticos, investigadores en el campo de la matemática educativa y docentes, reconocen una alta complejidad en el aprendizaje del concepto de función debido a la multiplicidad de sus registros representativos (numérico, gráfico, algebraico y verbal), a la gran variedad de contextos en los que puede aplicarse y a los distintos niveles de abstracción y generalización que involucra.

Por otra parte, el concepto de función ha evolucionado a través de más de 2000 años de historia, tanto en sus elementos definitorios y en sus formas de representación, como en la notación utilizada. Diversos estudios han mostrado que asociados a cada momento histórico de su desarrollo, existen obstáculos de aprendizaje ligados al conocimiento en sí mismo, y otros que están asociados a la forma en que los conocimientos se organizan y desarrollan en los programas, los libros de texto y en los salones de clase.

Actualmente, un gran número de investigaciones realizadas en Latinoamérica y los países anglosajones, se ha orientado hacia la indagación de las concepciones de los alumnos respecto a la noción de función, en busca de detectar aquellas que sean incorrectas o incompletas, así como las incoherencias en el manejo de las distintas formas de representación. Tales investigaciones se proponen aportar elementos que fundamenten el diseño pertinente de propuestas didácticas que permitan superar los obstáculos detectados.

El presente estudio sigue esta línea de investigación, en busca de contribuir a la solución de la problemática de aprendizaje asociada al concepto de función en nuestro medio.

El concepto de función prácticamente se estudia en todos los cursos de matemática que se imparten en la Facultad de Ingeniería, variando en su dominio de definición y sus campos de aplicación. Sin embargo, no se tiene respuestas para algunas interrogantes como:

- ¿Cuáles son las concepciones acerca del concepto de función que tienen los estudiantes del curso de pre-cálculo impartido en la Facultad de Ingeniería (Matemática Básica1)?
- ¿Cuáles de las concepciones evolucionan y cuáles permanecen a través del estudio del tema en los diversos cursos de matemática (Matemáticas Básica 1 y 2, Matemáticas Intermedias 1y 2)

- ¿Cuáles son los factores que determinan las concepciones de los estudiantes acerca del concepto de función y cuáles son las consecuencias de las mismas en la relación a la progresión de los aprendizajes?
- ¿Existen inconsistencias entre el conocimiento declaratorio de los estudiantes y el procedimental, manifestadas en el uso del concepto en la resolución de problemas y en reconocimiento de funciones?

Las respuestas a priori a estas y otras interrogantes, hasta el momento de iniciar el presente estudio eran empíricas ya que estaban basadas fundamentalmente en la experiencia acumulada por los profesores en las aulas. En Guatemala existen muy escasos estudios sobre el tema, ninguno realizado en los últimos diez años en la Facultad de Ingeniería; de manera que los encargados de reestructurar los programas de estudio de las diversos cursos, proponer secuencias didácticas tendientes a lograr un aprendizaje significativo del concepto de función o diseñar materiales de apoyo, no cuentan con elementos surgidos de un proceso sistemático de investigación realizado en nuestro contexto, que les orienten acerca de los verdaderos problemas a solucionar.

En consecuencia, los resultados del presente estudio se constituirán en valiosos insumos de trabajo para la innovación didáctica basada en la investigación educativa, tendiente a elevar la calidad de la educación matemática que reciben los estudiantes de la Facultad de Ingeniería.

Por otra parte, la presente investigación evidencia las enormes posibilidades de aplicar modelos matemático-estadísticos con el apoyo de paquetes de cómputo, en el estudio de problemas sociales, en particular, de hechos educativos. Conviene entonces resaltar la importancia que una amplia y profunda formación matemática tiene para posibilitar que los docentes universitarios participen en la investigación científica de los problemas de aprendizaje que enfrentan en las aulas.

Finalmente, los resultados obtenidos y su potencial como referentes en el diseño de secuencias didácticas y diseño de materiales de apoyo que permitan superar los obstáculos de aprendizaje detectados, concretan la vinculación de la investigación educativa con la innovación de los procesos de enseñanza y aprendizaje, contemplados en el desarrollo académico de la Universidad de San Carlos Guatemala en el Plan Estratégico 2022.

III. OBJETIVOS

El estudio realizado se proponía alcanzar los siguientes objetivos:

a) Generales

1. Caracterizar el dominio cognitivo de las concepciones que manifiestan los estudiantes de pre-cálculo y cálculo de la Facultad de Ingeniería, acerca del concepto de función.

2. Identificar las concepciones que permanecen y las que evolucionan a través del tránsito de los estudiantes desde el curso de Matemática Básica 1 hasta el de Matemática Intermedia II.

3. Identificar las concepciones de los estudiantes que están asociadas al desarrollo histórico del concepto de función y aquellas relacionadas con aspectos didácticos.

b) Específicos

Se propuso alcanzar a mediano plazo en congruencia con la evaluación intermedia de avances de la investigación, los siguientes objetivos:

1. Establecer categorías de análisis y codificación de las variables en estudio, por medio del análisis de resultados de la prueba piloto.

2. Estimar la distribución de los grupos de alumnos en cada categoría del dominio cognitivo del concepto de función, a partir del análisis de resultados de la prueba piloto.

Al final del estudio se propuso lograr los siguientes objetivos:

3. Determinar la posible influencia de la enseñanza en la formación de concepciones erróneas o incompletas, a través del análisis del desarrollo del tema en libros de texto y los apuntes de clase de los estudiantes.

4. Determinar las inconsistencias entre el conocimiento declaratorio y el conocimiento procedimental de los estudiantes, acerca del concepto de función y su aplicación en la modelación y resolución de problemas

IV. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA PARA CONSTRUCCIÓN DE MARCO TEÓRICO

1. Concepciones acerca del concepto de función

Al abordar el estudio de las concepciones que los estudiantes de precálculo y cálculo de la Facultad de Ingeniería poseen acerca de la noción de función, se adopta la caracterización de las concepciones de los sujetos propuestas por Ruiz (1998), en la cual intervienen:

- Los invariantes que el sujeto reconoce como elementos esenciales que determinan el objeto matemático.
- El conjunto de representaciones simbólicas que se asocian y utilizan para resolver situaciones problema vinculadas con el concepto.
- El conjunto de situaciones que el sujeto asocia con el concepto matemático, es decir, en las cuales considera apropiado su uso como herramienta.

En esta caracterización, las concepciones de un sujeto acerca de un objeto matemático, se consideran un sistema de prácticas que constituye una valiosa herramienta para el equipo de investigadores, ya que permite establecer una correspondencia entre las concepciones referidas a un objeto matemático y las prácticas (textuales, gráficas, orales, etc) explicitadas por los sujetos. Así, se indagó acerca de las concepciones de la noción de función, por medio de un instrumento en el cual se incluyeron situaciones correspondientes a las tres componentes descritas anteriormente.

En vista del carácter interno de las concepciones que un sujeto elabora, el estudio se restringe al análisis de los aspectos locales de dichas concepciones, evidenciados en las situaciones de evaluación que se emplearon.

Con base en los aportes teóricos de investigadores como Artigue (1989), Sierpinska (1992), Brousseau (1986), Ruiz (1998) y Farfán (2000), se revisaron diversos estudios de corte epistemológico acerca del concepto de función para identificar las características de los conocimientos científicos que se busca que los estudiantes aprendan y aquellos que en realidad adquieren. Entre dichos estudios destacan por su aporte, los realizados por Kleiner (1989) y por Ponte (1990). Bajo este mismo enfoque y con base en los trabajos de Gatica (2002), se analizó la presentación desarrollada del concepto de función en los libros de texto más utilizados en la Facultad de Ingeniería, así como el tratamiento del tema en los programas de los cursos de pre-cálculo y cálculo en los que estaban inscritos los estudiantes participantes en el estudio.

Las posiciones teóricas acerca de las representaciones semióticas, se toman de los aportes de Duval (1998) y de los estudios realizados por Hitt (1996) y Dolores (2002), en los cuales se evidencia que los sistemas de representación pueden ser de carácter numérico, gráfico, algebraico, analítico, pictórico y verbal.

Respecto a la forma de representación predominante, investigaciones realizadas por Tall (1988) con estudiantes anglosajones, evidencian el hecho de que los estudiantes muestran una marcada tendencia a conceptualizar una función como una expresión algebraica mostrando dificultad para la identificación de funciones cuando no se cuenta con una fórmula algebraica. Este hecho se torna particularmente importante al conjugarlos con los aportes de Ruiz, Kleiner y Ponte citados anteriormente, en los cuales se establece que dicha concepción corresponde a las definiciones dadas por Bernoulli y Euler en el siglo XVII, en las cuales se asociaba fuertemente el concepto de función con una expresión analítica.

Otros aportes teóricos importantes surgen del trabajo de De La Rosa (2003) en el cual indaga las concepciones de profesores mejicanos del nivel medio acerca del concepto de función. De La Rosa reporta que además de la tendencia de conceptualizar las funciones como expresiones analíticas, se tiene muy arraigada la idea de que las funciones deben representarse por una sola expresión algebraica. Esto permite explicar las dificultades manifiestas en el presente estudio, en la identificación de funciones definidas por partes tanto en forma algebraica como en la modelación de situaciones problema.

La revisión bibliográfica realizada respecto al tema, permitió adoptar como bases teóricas importantes los siguientes resultados:

- El manejo adecuado del concepto de función implica "*el dominio de las distintas representaciones del concepto, la evocación de las mismas sin ninguna contradicción y de manera casi espontánea"* (De La Rosa, 2003).

- En cuanto a la resolución de problemas "*la percepción de las funciones como una herramienta apropiada para modelar o matematizar relaciones entre magnitudes físicas (u otras) es una condición sine qua non para dar sentido al concepto de función en su totalidad"* (Sierpinska, citada por Ruiz, 1998)

La conjugación de estos resultados permite establecer cuándo y en qué medida el concepto de función ha sido adquirido y resalta la importancia esencial que tiene el hecho de presentar al estudiante situaciones problema de distinta índole, para la construcción global del concepto de función.

2. **Análisis multivariado de datos.**

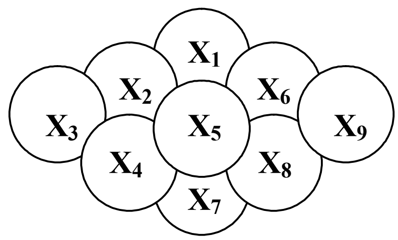
- **Aplicación del análisis factorial a bases de datos**

El Análisis Factorial es un modelo matemático que se emplea frecuentemente para crear nuevas variables que resuman toda la información de la que podría disponerse en las variables originales, también se usa para estudiar las relaciones que podrían existir entre las variables medidas en un conjunto de datos. Los conceptos y algoritmos del Análisis Factorial conducen a la construcción de un número menor de variables que son combinación lineal de las variables originales, con la característica esencial de que la proporción de la variabilidad explicada en estos nuevos términos está sujeta a un control relativo, dependiendo esto, del número de factores que se aíslen. Esta característica lleva a utilizar el Análisis Factorial como elemento reductor de variables.

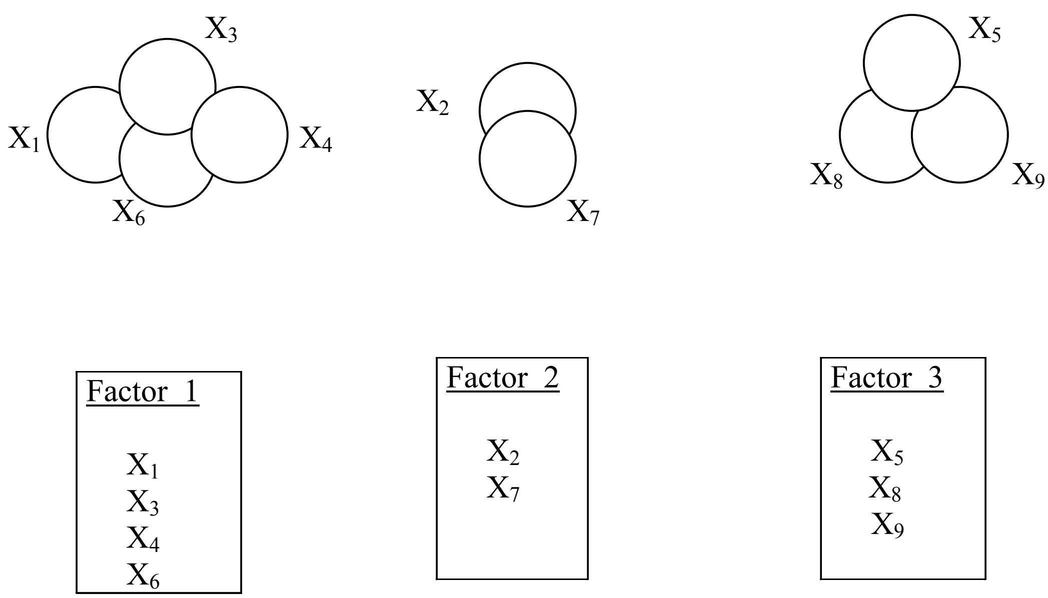
- **Fundamentos teóricos necesarios**

Se puede considerar que el Análisis Factorial trata de simplificar las múltiples y complejas relaciones que puedan existir entre un conjunto de variables observadas y que no sean evidentes. Estas son dimensiones comunes no conocidas o factores, que se enlazan con variables no relatadas y consecuentemente, proveen una estructura no conocida en los datos. En consecuencia, el Análisis Factorial permite la reducción de datos examinando la interdependencia de variables y proporcionando conocimiento de la estructura subyacente de los datos.

La esencia del Análisis Factorial es mostrada en la siguiente figura.



Nueve variables correlacionadas



Se muestran nueve variables, X_1, X_2, X_3, ..., X_9, en las cuales se encuentran tres factores comunes no observados. Las variables X_1, X_3, X_4 y X_6 son agrupadas, significando que ellas están altamente correlacionadas unas con otras y constituyen el primer factor.

De manera similar, las variables X_2 y X_7 definen un segundo factor y las variables X_5, X_8 y X_9 constituyen un tercer factor. Así, cada subconjunto de variables puede ser el reflejo de una dimensión latente no conocida (relaciones que no se observan en la base de datos). Así, en lugar de considerar las nueve variables separadamente, sólo se necesitará considerar los tres factores definidos en la figura.

Se presenta un breve resumen teórico del Análisis Factorial, que, únicamente, es utilizado como instrumento para el análisis.

El objetivo del Análisis Factorial es detectar el comportamiento común de un conjunto de variables y determinar en qué grado, este comportamiento común participa en la conducta general de los datos.

Si X es el vector de indicadores en el que cada fila corresponde a los valores observados (para este caso de estudio, respuestas dadas por lo estudiantes a las variables dicotómicas), entonces, se desea encontrar una matriz Λ y dos vectores f y e, tales que

$$X = \Lambda * f + e$$

en donde, f representa un vector de variables no observables que serán llamadas **factores**, los cuales resumen el comportamiento común del conjunto de variables, en tanto que e representa el comportamiento no común.

En este modelo las premisas asociadas son las siguientes:

$$E(e * e^t) = \Psi = \mathrm{diag}(\Psi i), \text{ y } \quad \mathrm{Cov}(e, f^t) = 0$$

$E(e * e^t)$ es la esperanza matemática de los comportamientos no comunes, que es una matriz Ψ, la cual es una matriz diagonal. $\mathrm{Cov}(e, f^t)$ es la matriz de covarianza del comportamiento no común con los factores transpuestos, cuyo resultado es cero (los factores representan lo común y e es lo no común) .

Estas condiciones determinan que: $\Sigma_{\mathbf{xx}} = \Lambda \Phi \Lambda^t + \Psi$
$\Sigma_{\mathbf{xx}}$ es la matriz de varianza-covarianza, que es generada por la suma directa de $\Lambda \Phi \Lambda^t$, que es la forma bilineal simétrica definida positiva, con la parte no común Ψ.

Si se asume que $\Phi = I$, la matriz identidad, se tiene entonces que,

$$\Sigma_{\mathbf{xx}} = \Lambda\Lambda^t + \Psi .$$

De tal manera que, dos diferentes componentes de la varianza, $\Lambda\Lambda^t$, son expresados por la varianza común y Ψ es la varianza correspondiente al comportamiento no común.

Es fácil mostrar que la estructura de la variabilidad bajo estas condiciones no cambia con la rotación ortogonal de la matriz de datos y en consecuencia, es invariante con respecto al cambio en la escala.

Para éste análisis, se usarán éstos elementos para determinar cual es el mejor modelo y en función de este, se usarán las siguientes convenciones:

a. Λ_i es el vector determinado por la i-ésima fila de la matriz Λ y corresponde a la componente X_i del vector aleatorio X .

b. $|\Lambda_i|^2$ corresponde a la varianza común asociada a X_i , y $1-|\Lambda_i|^2$ le corresponderá a la varianza no común.

c. Λ_j representa la columna asociada al factor f_j .

d. $|\Lambda_i|^2$ representa la parte de la variabilidad la cual es atribuida a f_j .

e. La cantidad $\Sigma|\Lambda_i|^2$ es el total de la variabilidad común y, usualmente se expresa en porcentaje, esto es $100 * (\Sigma|\Lambda_i|^2/n)$. Donde n es el número de variables. Análogamente, el total único es expresado como $100 * (\Sigma[1-|\Lambda_i|^2]/n)$.

Uno de los objetivos de este estudio, es la generación de una clasificación que, al igual que cualquier otra clasificación, se fundamenta en la observación del comportamiento común de las variables y, por lo mismo, el vector **f** de **factores** viene a ser fundamental en el proceso de la construcción de la clasificación.

- **Aplicación del análisis factorial**

El método de extracción utilizado fue el de "Ejes Principales", también conocido con el nombre de "Componentes Principales". Para Rummel (1970, p 120) "*Esta es una técnica matemática utilizada para determinar las componentes principales en una elipse en dos o más dimensiones. En Análisis Factorial, esta técnica es usada para dibujar el concepto empírico de un dominio, reduciendo los datos a un pequeño conjunto de variables independientes. Las componentes principales son el mínimo de dimensiones ortogonales requerido para reproducir (definir, generar, explicar) linealmente los datos originales*".

El trabajo en el Análisis Factorial persigue que los factores tengan una interpretación clara, porque de esa forma se analizan mejor las interrelaciones existentes entre las variables originales. Sin embargo, en muy pocas ocasiones resulta fácil encontrar una interpretación adecuada de los factores iniciales, con independencia del método que se halla utilizado para su extracción. Precisamente los procedimientos de rotación de factores se han ideado para obtener, a partir de la solución inicial, unos factores rotados que estén correlacionados en mayor o menor medida con cada una de las variables originales; pues bien, se trata de que cada una de las variables originales tenga una correlación lo mas próxima a 1 posible, con uno de los factores y correlaciones próximas a cero con el resto de los factores.

En la rotación ortogonal, los ejes se rotan de forma que quede preservada la incorrelación entre los factores, dicho de otra forma, los nuevos ejes o ejes rotados son perpendiculares de igual forma que lo son los factores sin rotar.

Con lo anteriormente expuesto, se utiliza el procedimiento de rotación ortogonal llamado Varimax. "*Se dice que dos vectores X_j y X_k son ortogonales uno respecto del otro si*"

(X_j , X_k) = 0, es decir, si el producto entre ellos es igual a cero." "*Existe el consenso que para la rotación ortogonal, el criterio Varimax consigue la mejor función, por la estructura simple en la rotación analítica"* (Rummel, 1970, p. 128)

"El criterio Varimax es una función de la varianza de la columna del factor encontrado; como la varianza que se encuentra en el factor, es más grande o más pequeña, la varianza al cuadrado del factor es más grande. La varianza más grande es obtenida cuando el factor encontrado esta cerca de cero o cerca de uno. Por consiguiente una rotación ortogonal puede ser calculada por la maximización de la varianza (de aquí el nombre, Varimax) de los valores al cuadrado del factor encontrado. Esta función es:

$$V = m\sum_{l=1}^{p}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\alpha_{jl}}{h_j}\right)^4 - \sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha_{jl}^{\ 2}}{h_j^{\ 2}}\right)^2$$

donde V es la varianza de los factores normalizados, α_{jl} es el factor encontrado de la variable X_j sobre el factor S_l , y h_j^2 es la comunalidad de la variable X_j . La ecuación anterior es llamada "el criterio normal Varimax", esta envuelve la normalización de las filas de los factores encontrados." (Rummel, 1970, p. 130)

A mayor Comunalidad, más afecta una variable en su propio factor y en la composición de los diversos factores

La palabra comunalidad es una traducción literal del inglés de la palabra "communality", que vendría a significar lo que tienen en común. Se escoge la traducción literal para este concepto.

Vale la pena aclarar que no existe ningún criterio objetivo sobre el número de factores a utilizar y tampoco sobre el número de variables que se puedan eliminar, claro está, hay criterios que son tomados en cuenta para determinar el número de factores, como el gráfico de sedimentación, suma mayor que 1 en los valores propios, entre otros.

En principio, el número de factores puede ser igual al número de variables que se utilizan para el análisis; en este caso, el Análisis Factorial perdería su razón de ser.

Según Dillon-Goldstein (1984, p. 586) "*el número de factores a retener en el Análisis Factorial será cuando la suma de los eigenvalores sea lo más cercana posible (menor o igual) a la Comunalidad"*.

Otro criterio utilizado en la determinación del número de factores, es que están en función del número de curvaturas que tiene el gráfico de sedimentación, que es plotear los valores propios en forma descendente y observar donde ocurre la máxima curvatura.

- **Aplicación del análisis de cluster a la base de datos**

El Análisis de Cluster tiene la característica esencial de que su objeto de observación y tratamiento está constituido por la unidad de observación diseñada y perteneciente a una población escogida. Mediante los conceptos de similitud o disimilitud se logran asociar a aquellas unidades de observación que de acuerdo con la noción de distancia empleada, son más próximos entre sí, constituyendo lo que se podría llamar un Cluster. Estos individuos así agrupados pueden ser considerados como iguales o equivalentes según la distinción que determine el observador.

De acuerdo con esto se podría considerar que el Análisis de Cluster puede ser tomado como una metodología que conduce a recrear un nuevo universo de observación, en donde el número de unidades es menor. A esto se podría denominar como una técnica reductiva de unidades de observación.

- **Fundamentos teóricos necesarios**

El proceso típico del Análisis de Cluster comienza por tomar, "p" medidas sobre "n" objetos. La matriz de "n x p" de datos en las filas, es transformada en una matriz de "n x n" de similitud o, alternativamente, de medidas de distancias, donde la similitud de las distancias son calculadas entre pares de objetos a lo largo de las "p" variables. El siguiente paso del algoritmo del Análisis de Cluster define las reglas concernientes a cómo el Cluster de los objetos se lleva a subgrupos sobre la base de la similitud entre los mismos.

La palabra inglesa Cluster significa en español: conglomerado, manada, pelotón, agrupar. Aquí se optará por utilizar la palabra en su idioma original.

La meta en las aplicaciones del Cluster, es arribar a grupos de objetos para ser mostrados en forma condensada. Como paso final, los Cluster desconocidos son contrastados en términos de sus valores medios sobre las "p" variables u otras características de interés.

Hay dos problemas en la aplicación del procedimiento de Cluster descrito anteriormente. Primero, se necesita decidir una medida sobre la similitud entre los objetos; pero, esto requiere que se defina cuál es el significado de similitud, lo cual no siempre es fácil. Segundo, se necesita especificar un procedimiento para formar los Cluster, basados en la escogencia de la medida de similitud. La solución de estos problemas cae fuera de este estudio.

Para ilustrarlo, se consideran los objetos como puntos en un espacio p-dimensional, con cada una de las "p" variables representadas por uno de los ejes de este espacio. Un sistema de coordenadas p-dimensional es definido en el espacio por los valores de las variables para cada objeto. Se describen los Cluster como regiones continuas que aparecen en el espacio, teniendo una masa relativamente grande, esto es, una densidad alta de puntos, los cuales son separados de otras regiones, por regiones que tienen una masa relativamente baja (una densidad baja de puntos).

Una consideración de extrema importancia en el Análisis de Cluster es el efectivo peso dado a cada una de las variables. Una matriz de datos X puede contener un pequeño grupo de variables altamente correlacionadas y por esto sólo puede ser representada con unas pocas dimensiones sobre escondidas.

En un Análisis de Cluster cada variable estandarizada en X tiene usualmente el mismo peso, así, si algunas dimensiones están sobre representadas por conjuntos de variables altamente correlacionadas, el Análisis de Cluster resultante puede tener gran peso en estas dimensiones sobre representadas. Un Análisis Factorial preliminar de la matriz de correlación puede ser usado para extraer las dimensiones sobre escondidas antes de que se aplique el Análisis de Cluster. Es importante guardar en la mente que solo los factores más importantes son retenidos para la aplicación del Análisis de Cluster, esto puede o no ser ventajoso.

- **Aplicación del análisis de Cluster**

La obtención de datos de los factores, anteriormente descrita, permite su utilización para aplicar el Análisis de Cluster. Como se ha dicho en la sección anterior, el Análisis de Cluster agrupa en este caso casos (individuos) y si utilizamos la $\mathbf{X}^t$ se genera la agrupación de variables. Entre los métodos y medidas están: Vinculación Inter-grupos, Vinculación Intra-grupos, Vecino más próximo, Agrupación de Centroides, Agrupación de Medianas, el método de Ward y la Correlacion de Pearson. Para las medidas de distancia o similaridad están: Distancia Euclidiana, Cuadrado de la Distancia Euclidiana, Coseno, Chebychev .

Uno de los resultados de la aplicación del Análisis de Cluster, es el Dendograma. "*Los Dendogramas pueden emplearse para evaluar la cohesión de los conglomerados (clusters) que se han formado y proporcionar información sobre el número adecuado de Clusters que deben conservarse. El Dendograma constituye la representación visual de los pasos de una solución de conglomeración jerárquica que muestra, para cada paso, los cluster que se combinan y los valores de los coeficientes de distancia".*(Pérez, Cesar. 2001)

Las líneas verticales conectadas designan casos combinados, el Dendograma re-escala las distancias reales a valores entre 0 y 25, preservando la razón de las distancias entre los pasos.

3. Fundamentos de teoría de confiabilidad y pruebas de hipótesis

Para determinar la confiabilidad del instrumento utilizado y para la interpretación de las respuestas dadas por los estudiantes se revisaron aspectos teóricos respecto a la teoría de confiabilidad y pruebas de hipótesis. Los principales fundamentos se incluyen a continuación.

- **Confiabilidad del Instrumento de Evaluación**

La determinación de la confiabilidad de un instrumento de evaluación se vincula con la necesidad de indagar en qué medida dicho instrumento evalúa lo que se pretende evaluar y con la posibilidad de poder ser utilizado para evaluar toda una población, es decir, se pretende establecer la precisión de la prueba.

Existen varios modelos teóricos para medir la confiabilidad de un instrumento, a continuación se mencionan algunos de ellos.

- *La teoría de la generalizabilidad*. Los fundamentos de la teoría de la generalizabilidad fueron establecidos en los documentos de Chronbach, Rajarantanam and Gleseer (1993) como se indica en el libro de Robert L Brennan, Elements of Generalizability Theroy, el cual emplea la descomposición de la varianza observada en la puntuación de la prueba, por medio del análisis de varianza. Adicionalmente se revisó la aplicación de dicha teoría realizada por Ruiz Higueras (1998) en el estudio titulado "La noción de función: Análisis epistemológico didáctico". En dicho estudio se realizaron estimaciones de la varianza debida a las preguntas, la varianza debida los sujetos, así como la varianza residual.

- *El modelo del coeficiente alfa de Cronbach*. En este caso se pretende determinar si las diferencias entre los coeficientes alfa obtenidos en muestras dependientes o independientes, son estadísticamente significativas. Quizás una de las aplicaciones más representativas de la comparación de estimaciones de consistencia interna de un instrumento, es la investigación del sesgo, específicamente en el estudio del sesgo de la validez del constructo, en el que el supuesto básico que se investiga es la equivalencia de la exactitud de la medición en los grupos de comparación. (Reynolds 2000 citado por Merino y Lautenschlager, 2003, pp. 127-136)

  Dicho coeficiente esta básicamente relacionado con el cociente entre la varianza observada para las personas evaluadas y la varianza observada entre las preguntas en estudio. Este coeficiente siempre se vincula con un coeficiente de correlación positivo y por lo tanto, mientras sea más cercano a 1 se considera una correlación perfecta, es decir, evidencia una estrecha relación entre las variables en estudio.

  Por otra parte, en un estudio sobre la Validación de un instrumento para medir las competencias conductuales en personas VIH positivas, se establece que el coeficiente alfa de Cronbach es muy utilizado para medir la confiabilidad del instrumento utilizado. (Piña-López, Julio Alfonso 2003, p 295).

  Adicionalmente, se revisó un estudio en el campo de la psicología referente a la utilización del coeficiente alfa para determinar si un instrumento diseñado para medir la autoestima de niños de cierta edad, podría utilizarse con niños de edades distintas. El instrumento se aplicó a 64 niños de tercer grado y el valor del coeficiente alfa fue de 0.72; a 87 niños de sexto grado y el coeficiente obtenido fue de 0.81, mientras que con 101 alumnos de primero básico, fue de 0.87. Concluyendo que el instrumento utilizado es menos confiable para los niños de menor edad. (Piña-López, 2003, p.132.).

- **Determinación de la confiabilidad del instrumento piloto para evaluar el concepto de función.**

Luego de aplicar la prueba piloto a la muestra seleccionada, integrada por 93 estudiantes distribuidos en los cuatro cursos en estudio, se procedió a determinar la confiabilidad del instrumento de evaluación utilizando para el efecto, el modelo del coeficiente alfa de Cronbach, en la opción Confiabilidad del paquete estadístico SPSS, que posee la Dirección General de Investigación –DIGI-.

La confiabilidad del instrumento se determinó para las preguntas correspondientes a la parte II-A y parte II-B del cuestionario, donde la respuesta solo podía ser correcta o incorrecta.

En el caso de la parte A las preguntas consistían en identificar si las expresiones algebraicas que se presentaban correspondían a una función o no. Mientras que en la parte B se les pedía identificar entre las figuras que se les presentaban, aquellas que podían considerarse como una representación gráfica de una función. En total se utilizaron para la prueba 17 preguntas (ocho de la parte A y nueve de la parte B).

Como resultado del procesamiento de los datos de la muestra piloto, se obtuvo un coeficiente alfa de 0.7072, lo que indica que el instrumento es confiable para la realización del estudio.

Con el resultado anterior se determino que la prueba es confiable y que podía utilizarse para evaluar la muestra definitiva de 368 estudiantes y cuyos resultados se utilizan en la realización de inferencias respecto de las concepciones que del concepto de función tiene la población estudiantil de los cursos de matemática en estudio.

- **Pruebas de hipótesis**

Entre los propósitos de la teoría del muestreo, se tiene la realización de inferenciasrespecto de parámetros desconocidos, basados en la información que se obtiene a través de los datos muestrales.

Estas inferencias se hacen luego de evaluar ciertas conjeturas o supuestos que se hacen acerca de la población en estudio. Dichos supuestos se conocen como hipótesis estadísticas o hipótesis nulas, las que pueden formularse con el propósito de rechazarlas o invalidarlas, y se denotan por Ho. Cualquier hipótesis que difiera de Ho se denomina hipótesis alterna y se denota por Ha o H_1.

- **Ensayos de hipótesis**

Los procedimientos que facilitan decidir si una hipótesis nula Ho se rechaza, o mejor dicho que permiten determinar si los resultados de las muestras observadas difieren significativamente de los resultados esperados, se conocen como ensayos de hipótesis, ensayos de significación o reglas de decisión.

- **Tipos de errores**

Al ensayar una hipótesis es posible que se cometa algún error al rechazar o no una hipótesis estadística, estos se conocen como el error tipo I y el error tipo II.

Error tipo I: es el error que se comete al rechazar una hipótesis que es verdadera, este error lo determina el investigador o el analista a través de la fijación del nivel de significación α el cual regularmente toma valores de 1% o de 5%.

Error tipo II: es el error que se comete al no rechazar una hipótesis que es falsa, este error lo determina el investigador o el analista a través de la fijación de la potencia de la prueba $\eta = 1 - \beta$.

- **Tipos de ensayo**

Los ensayos de hipótesis pueden ser bilaterales (a dos colas) o unilaterales (a una cola), esto lo define la hipótesis alterna Ha que se defina.

Ensayos bilaterales

Sea θ un parámetro cualquiera y θ_0 un valor que puede tomar θ., se dice que se tiene un ensayo bilateral cuando:

$$\text{Ho: } \theta = \theta_o$$
$$\text{Ha: } \theta \neq \theta_o$$

Ensayos unilaterales

Sea θ un parámetro cualquiera y θ_0 un valor que puede tomar θ., se dice que se tiene un ensayo unilateral cuando:

$$\begin{array}{lcl} \text{Ho: } \theta = \theta_o & & \text{Ho: } \theta = \theta_o \\ \text{Ha: } \theta < \theta_o & \text{o} & \text{Ha: } \theta > \theta_o \end{array}$$

Pasos a seguir en un ensayo de hipótesis

1. Definir la hipótesis nula Ho.
2. Definir la hipótesis alterna Ha.
3. Definir el nivel de significación α.
4. Establecer la región crítica o zona de rechazo de Ho, de acuerdo a la distribución de probabilidad del ensayo.
5. Calcular el estadístico de prueba, según la distribución de probabilidad del ensayo.
6. Aplicar la regla de decisión: "*si el estadístico de prueba cae en la zona de rechazo, se rechaza Ho*".

Dada la naturaleza de la investigación el ensayo de hipótesis utilizado esta referido a la diferencia de proporciones, de la siguiente forma:

- Prueba de hipótesis para la diferencia de proporciones de dos poblaciones con $p_1 = p_2$ pero desconocidas

1. $H_0 = p_1 - p_2 = 0$
2. $H_1 = p_1 - p_2 \neq 0$, $H_0 = p_1 - p_2 < 0$, $H_0 = p_1 - p_2 > 0$
3. α=1% o 5% si así se desea
4. Establecer región crítica utilizando la tabla de la distribución normal.
   Ensayo bilateral $-Z_{\alpha/2}$ y $Z_{\alpha/2}$
   Ensayo unilateral $-Z_{\alpha}$ o Z_{α}
5. Estadístico de prueba:

$$z = \frac{(P_1 - P_2) - 0}{S_p}$$

$$S_p = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p}) * \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

6. Regla de decisión:
   Ensayo bilateral si z< $-Z_{\alpha/2}$ o z > $Z_{\alpha/2}$ se rechaza Ho.
   Ensayo unilateral si z < $-Z_{\alpha}$ o z > Z_{α} se rechaza Ho.

Esta prueba fue utilizada en el análisis de la parte III para el contraste de hipótesis de diferencia de proporciones igual a cero entre respuestas observadas entre cursos en estudio, utilizando un nivel de significación del 5%.

- **Pruebas de Independencia**

Las pruebas de independencia de dos variables cualitativas agrupadas en un cuadro de doble entrada, se realiza utilizando la prueba Chi cuadrado que compara la frecuencia observada en la relación de las variables en estudio $\boldsymbol{(o_{ij})}$ con las frecuencias esperadas $\boldsymbol{(e_{ij})}$.

donde: $e_{ij} = \dfrac{\sum r_i * \sum c_j}{n}$ representa la frecuencia esperada de cada celda

y, n = total de casos observados

Es importante resaltar el hecho de que las variables en estudio son de tipo cualitativo y la frecuencia observada $\boldsymbol{(o_{ij})}$ representa la ocurrencia simultanea de del valor r_i y el valor c_j.

	Variable 2				Total
Variable 1	c_1	c_2	…	c_j	
R_1	$\boldsymbol{O_{11}}$ $\boldsymbol{(e_{11})}$	$\boldsymbol{O_{12}}$ $\boldsymbol{(e_{12})}$	**…**	$\boldsymbol{O_{1j}}$ $\boldsymbol{(e_{1j})}$	Σr_1
R_2	$\boldsymbol{O_{21}}$ $\boldsymbol{(e_{21})}$	$\boldsymbol{O_{22}}$ $\boldsymbol{(e_{22})}$	**…**	$\boldsymbol{O_{2j}}$ $\boldsymbol{(e_{2j})}$	Σr_2
…					
r_i	$\boldsymbol{O_{i1}}$ $\boldsymbol{(e_{i1})}$	$\boldsymbol{O_{i2}}$ $\boldsymbol{(e_{i2})}$	**…**	$\boldsymbol{O_{ij}}$ $\boldsymbol{(e_{ij})}$	Σr_i
Total	Σc_1	Σc_2	…	Σc_j	N

En las pruebas de independencia se plantea la hipótesis siguiente:

1. H_0: Existe independencia entre la variable 1 y la variable 2
2. H_1: No existe independencia entre las variables.
3. El nivel de significación α usualmente de 1% o 5%.
4. La región crítica esta dada por un valor $\chi^2_{(\alpha,\ (r-1)(p-1))}$
5. El estadístico de prueba de la distribución Chi cuadrado de la forma:

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

6. Si $\chi^2 > \chi^2_{(\alpha,\ (r-1)(p-1))}$ se rechaza la hipótesis de nula H_0, y se concluye que las variables no son independientes.

V. METODOLOGÍA

1. Enfoque

La investigación realizada es de tipo tanto descriptivo como interpretativo predominantemente cualitativo y fue abordada desde la perspectiva de la teoría de sistemas, en la cual se consideran dimensiones epistemológicas, sociales y cognitivas para describir las interacciones entre el saber matemático, el educador y los educandos; de manera que el estudio de un hecho didáctico, en este caso, el aprendizaje del concepto de función, no puede explicarse mediante el análisis separado de sus componentes, ni obviar las interacciones de los sistemas didácticos con el entorno sociocultural, tecnológico y científico, las cuales influyen y condicionan su funcionamiento.

Con este enfoque, se considera que en el sistema de enseñanza además influye directa o indirectamente , un complejo sistema llamado por Chevallard (1991) *noosfera*, el cual está constituido por programas de estudios, textos utilizados, formación de los educadores, y todas las personas encargadas de diseñar políticas educativas, así como los enfoques filosóficos y didácticos utilizados.

Los subsistemas constituidos por los estudiantes, los educadores y el saber a aprender, poseen características propias ligadas a sus historias respectivas, así:

- El estudiante es un sujeto al mismo tiempo individual y social que aprende a aprender y a aplicar el conocimiento que elabora en determinadas situaciones, tanto en el aula como fuera de ella.

- El educador es un sujeto igualmente aprendiente, cuya tarea principal consiste en la generación de instancias de aprendizaje que permitan a los estudiantes el desarrollo de sus potencialidades intelectuales, emocionales y éticas, mediante su participación activa en la elaboración de conocimientos y adquisición de habilidades instrumentales.

- El saber a aprender (llamado por Chevallard *"saber a enseñar")* es el producto de la interacción entre el conocimiento científico (*saber sabio*, en la terminología usada por Chevallard) y los saberes que un sistema social considera importante que sus miembros adquieran en distintos momentos y con determinados fines. Al igual que el estudiante y el educador, el saber a aprender tiene una historia particular que lo caracteriza en un contexto particular científico-temporal.

El enfoque metodológico y la construcción de las categorías de análisis de las respuestas dadas por los estudiantes, se adopta principalmente de los aportes surgidos de los trabajos de Ruiz (2002) y Hitt (1998), en los cuales se estudian las concepciones acerca del concepto de función que poseen estudiantes de bachillerato de España y México respectivamente. Tal como se expresó anteriormente, se ensayó una investigación cualitativa de tipo interpretativa respecto a las concepciones de los estudiantes y descriptiva para el análisis de documentos. Entre las principales características que comparte el presente estudio con los trabajos mencionados están:

- Se evita la manipulación intencional de las variables en estudio.
- Se recurre a la observación indirecta no participante, ya que no se observó cómo se desarrolla el tema en las aulas, sino que se analizó su presentación en los libros de texto y los programas de cursos.

- El interés se centra en indagar la visión de los estudiantes acerca del concepto de función, sin imponer categorías de análisis previas, ya que éstas surgieron del análisis de resultados de la prueba piloto.
- Estudio sistémico del fenómeno de aprendizaje del concepto de función.

2. Dimensiones

- Puesto que se cuenta con un marco teórico previo general surgido en la didáctica de la matemática, así como múltiples resultados de estudios específicos acerca del tema, el estudio se ubica en una dimensión de carácter deductivo.

- Para el presente estudio se contaba con hipótesis previas generadas en estudios anteriores, que señalan la vinculación de las concepciones que elaboran los estudiantes acerca de objetos matemáticos, con el desarrollo histórico de los conceptos y con el tratamiento didáctico que se realiza del tema en los textos y en las aulas. Por lo tanto, la investigación puede ubicarse en la dimensión verificativa, ya que buscaba aportar nuevos datos para la confirmación de las hipótesis.

- Dado que las concepciones de los estudiantes acerca del concepto de función se infirieron a partir de las prácticas manifiestas en situaciones de respuestas abiertas, y que dichas respuestas se interpretaron por el equipo investigador, el estudio se ubica en la dimensión subjetiva de la investigación.

3. Variables

- Concepciones que poseen los estudiantes de pre-cálculo y cálculo acerca del concepto de función.

  Indicadores. Puesto que las concepciones no son directamente observables, fueron inducidas de las prácticas explicitadas por los alumnos en situaciones evaluativas propuestas con diferentes fines, entre ellos:

  - Inferir aspectos declarativos de las concepciones.
  - Inferir el reconocimiento del concepto de función de otros objetos matemáticos, así como de sus componentes y propiedades.
  - Detectar el empleo de funciones en situaciones de modelación.

- Tratamiento didáctico del concepto de función.

  Indicadores . En el análisis directo de programas y libros de texto se tomaron como indicadores empíricos de esta variable:
  - Ubicación del concepto de función en los programas de los cursos.
  - Registros de representación utilizados en la presentación del concepto en los libros de texto y en los apuntes de los estudiantes.

- Tipo de ejemplos y ejercicios propuestos en libros de texto y apuntes de los estudiantes.

4. Hipótesis

a) Los estudiantes poseen una diversidad de concepciones locales acerca del concepto de función, algunas de las cuales pueden identificarse con concepciones mantenidas históricamente y otras asociadas al tratamiento didáctico del tema.

b) Las concepciones de la noción de función manifiestas a nivel declarativo por los estudiantes, no siempre son consistentes con las mostradas a nivel de modelación.

c) Los estudiantes encuentran obstáculos para transitar por las distintas representaciones del concepto de función.

d) Muchas de las concepciones incompletas o erróneas que los estudiantes muestran en el curso de pre-cálculo acerca del concepto de función, se mantienen a pesar de haber estudiado el tema en tres cursos más de cálculo.

5. Población y muestras

La población objeto de estudio está constituida por cuatro poblaciones consideradas independientes integradas por los estudiantes que en el primer semestre de 2005 se asignaron por primera vez el curso de Matemática Básica 1, conjuntamente con los estudiantes que se asignaron los cursos de Matemática Básica 2, Matemática Intermedia 1 y Matemática Intermedia 2. A continuación indican los tamaños poblacionales y los respectivos tamaños muestrales.

Población	Tamaño poblacional	Tamaño muestral
Estudiantes Matemática Básica 1	1264	91
Estudiantes Matemática Básica 2	1143	96
Estudiantes Matemática Intermedia 1	876	31
Estudiantes Matemática Intermedia 2	1175	90
Total	**4458**	**368**

Fuente: Centro de Cálculo, Facultad de Ingeniería. USAC.

Para la evaluación del instrumento de recolección de información, mediante un muestreo aleatorio simple, usando números aleatorios en los listados de los alumnos de cada curso, se seleccionó una muestra piloto de 93 alumnos; de dichos estudiantes 23 eran de MB1, 19 de MB 2, 34 de MI 1 y 17 de MI 2. La muestra definitiva se seleccionó de manera análoga, excluyendo de la selección a los alumnos que hubiesen sido seleccionados en el muestreo anterior. En ambos casos se convocó a los estudiantes a una reunión informativa y se les consultó acerca de su disponibilidad para participar en el estudio.

6. Fases de la investigación

Los resultados de la investigación surgieron de la integración de tres estudios complementarios, que en buena medida, se realizaron paralelamente:

- *Revisión bibliográfica*: se efectuó una revisión bibliográfica exhaustiva de los estudios acerca de la evolución histórica del concepto de función y de los obstáculos asociados con dicha evolución. Asimismo, se revisaron estudios específicos acerca de las concepciones de alumnos de distintos niveles, acerca del concepto de función.

- *Análisis didáctico del concepto de función*: El estudio de la visión del concepto de función presentada por el sistema de enseñanza a través de programas y libros de texto, permitió conocer las condiciones y restricciones del tratamiento didáctico institucional dado al concepto.

- *Estudio de las concepciones de los estudiantes:* En esta etapa se buscaba no sólo la descripción de las concepciones que los estudiantes tienen acerca del concepto de función, sino que también identificar las inconsistencias entre los conocimientos declarativos y su aplicación en la resolución de problemas. Con fines comparativos, se manejó por separado la información de los cuatro subgrupos de estudiantes participantes.

7. Recolección de datos

Elaboración de instrumentos de recolección de información

- El proceso inició con la revisión bibliográfica acerca de las tareas que comprenden el dominio cognitivo del concepto de función y la revisión de instrumentos utilizados en otros estudios similares.
- Luego cada miembro del equipo de investigación propuso diversas situaciones problema para incluir en el instrumento piloto de acuerdo con la modalidad de cuestionario adoptado y la estructuración definida para el mismo.
- Se procedió a la elaboración del cuestionario piloto y se presentó a profesores del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería, solicitando sus opiniones y sugerencias acerca de la estructura y contenido del mismo. Las opiniones fueron discutidas por el equipo y se realizaron las correcciones en las que se logró consenso acerca de su pertinencia.
- El cuestionario piloto fue aplicado a todos los estudiantes simultáneamente, durante un tiempo cuya máxima duración se estableció en dos horas, aunque ningún estudiante se excedió de hora y media en la solución. Se adjunta ejemplar en anexo.
- El análisis de las respuestas dadas por los estudiantes en el instrumento piloto, permitió hacer algunos pequeños ajustes y modificaciones al instrumento definitivo, aplicado a los 368 estudiantes del muestreo definitivo.

- El cuestionario definitivo fue aplicado dividiendo a los estudiantes por jornadas, uno en horario de 9:00 a 11:00 y otro en horario de l5:00 a l7:00 horas.

8. Análisis de datos

- El análisis efectuado en reportes de investigación, programas de los cursos y libros de texto, es de tipo cualitativo y se realizó a lo largo de toda la investigación con el propósito de ampliar el marco teórico inicial y recabar evidencia que avalara las hipótesis o condujera a su replanteamiento progresivo.

- El análisis de las respuestas dadas por los alumnos a las situaciones evaluativas es tanto cualitativo como cuantitativo:

  - Se hizo un análisis de contenido tomando como unidades de análisis las repuestas dadas a cada situación; para ello se efectuó la categorización y codificación de las variables en estudio.

  - A partir de las tablas de de frecuencias de las variables en estudio, se realizaron cruces entre las clasificaciones correspondientes a cada curso, con el objetivo de identificar la evolución de las variables durante el proceso de aprendizaje.

  - Análisis factorial de correspondencia de las respuestas dadas por los estudiantes en las situaciones de reconocimiento de funciones a partir de su representación gráfica y de su representación algebraica.

  - Análisis "cluster" de las situaciones de reconocimiento de funciones, en busca de identificar agrupaciones de los datos obtenidos.

9. Divulgación

- Al inicio de la investigación, se dio a conocer la realización del estudio a los docentes y auxiliares del departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería.

- Los resultados finales de la investigación se darán a conocer a los profesores y auxiliares del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería, así como a los docentes que imparten matemática en todas unidades académicas de la USAC, a través de una reunión para la cual se solicitará el apoyo de la Dirección General de Docencia de la USAC.

- Se propone realizará una presentación de los resultados obtenidos a los integrantes del Centro de Investigación de la Facultad de Ingeniería, Unidad de Planificación y Dirección de la Escuela de Ciencias de esta unidad académica.

- Se hará una presentación del reporte de investigación a los integrantes del SUN encargados de la elaboración de pruebas de conocimientos generales de matemática, así como a los responsables de la elaboración de pruebas específicas de matemática de las unidades académicas que las realicen. A esta misma reunión se invitará a los miembros del Programa de Educación a Distancia que tienen a su cargo la elaboración de materiales de apoyo para los estudiantes aspirantes a ingresar a la Universidad de San Carlos de Guatemala.

- El reporte de investigación se presentó a docentes del nivel medio y superior en el X Congreso Nacional de Matemática Educativa que se realizó en el mes de noviembre en la Facultad de Ingeniería. Además se entregará un documento escrito a la Ministra de Educación.

VI RESULTADOS OBTENIDOS

A continuación se presentan los resultados obtenidos, en el siguiente orden:

a) Evolución histórica del concepto de función.
b) Análisis de programas y libros de texto.
c) Análisis de respuestas al instrumento utilizado.

a) Evolución histórica del concepto de función

El concepto de función se considera uno de los más importantes en todas las matemáticas. Así como el punto, la línea y el plano eran los elementos básicos de la geometría Euclidiana, que fue la teoría dominante desde el tiempo de Grecia Antigua hasta la Edad Moderna, las nociones de función y de derivada constituyeron la base del análisis matemático, teoría que llega a ser central en el desarrollo de las matemáticas hasta la fecha.

1. El desarrollo del concepto de función en la edad antigua

La noción de función en forma explícita surgió hasta el comienzo del siglo XVIII, aunque los antecedentes más antiguos del concepto aparecen cerca de 2000 A.C. Entre las razones principales por las que el concepto de función no surgió antes pueden mencionarse:

- La falta de requisitos algebraicos previos. Ausencia de los números reales y del desarrollo de la notación simbólica.

- La falta de motivación. *¿Por qué definir una noción abstracta de función si no se tiene muchos ejemplos para abstraer dicha noción*? (Kleiner, 1989, p. 282)

En la antigüedad empiezan a manifestarse relaciones que contienen ciertos elementos similares al concepto de función, como puede observarse en las tablas construidas para cálculos y astronomía. Algunos problemas particulares de relaciones de variación entre dos magnitudes fueron estudiados y resueltos, pero no se generalizaron las ideas de estos problemas pues no existía la idea abstracta de variable que permitiera hacerlo; en consecuencia, la variación de cantidades era descrita por medio de una gráfica en lugar de una fórmula.

Los Babilonios (2000 A.C.) construyeron tablas de diferentes valores de recíprocos, cuadrados, raíces cuadradas, cubos, raíces cúbicas y muchas otras cosas; también los astrónomos organizaban sus cálculos en tablas, las cuales estaban dispuestas en dos columnas de forma análoga a las tablas de valores que se acostumbra construir en la actualidad para representar numéricamente cualquier función.

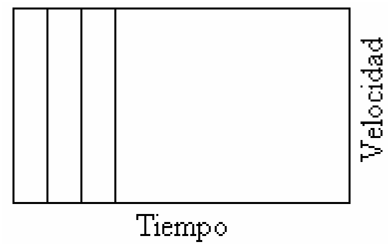
El concepto griego de función se desarrolló alrededor de muchos campos simultáneamente. Los griegos estudiaron las leyes de la acústica y construyeron una tabla de acordes, lograron esto estudiando la dependencia de la longitud y tonos de las notas emitidas al tocar cuerdas del mismo tipo bajo igual tensión. Por otra parte, los astrónomos griegos construyeron tablas de la función seno similares a las nuestras. Además, estudiaron geometría y curvas, calcularon áreas, volúmenes, longitudes y centros de gravedad de algunos cuerpos.

También estudiaron problemas que involucraban cambio y variación, analizaron el movimiento, continuidad e infinitud. Todos los problemas fueron específicos y explicados verbalmente en una tabla, gráfica o con un ejemplo. Al parecer los griegos miraban sus problemas como funciones sin que usaran específicamente la palabra "función", pero tal como se indicó antes, sin el simbolismo algebraico no era posible expresar sus ideas como expresiones analíticas o fórmulas.

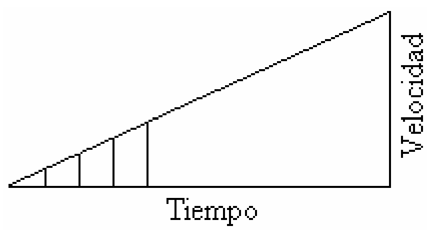
2. El desarrollo del concepto de función en la edad media

Durante mucho tiempo no hubo grandes avances matemáticos, fue hasta el siglo XIII en donde las matemáticas comienzan a ocupar un lugar cada vez más importante en las ciencias de la naturaleza. El desarrollo de la noción de función se enriqueció con aportes muy significativos de las escuelas de filosofía natural de Oxford y París. Algunos fenómenos sujetos al cambio, tales como el calor, la luz, la densidad, la distancia y la velocidad, fueron llamados *cualidades o formas* (según terminología de Aristóteles). Una *forma* se definió como cualquier cantidad o cualidad variable en la naturaleza. La *intensidad* o *latitud* de una forma era el valor numérico que había que asignarle en relación con otra forma invariable que llamaban *extensión o longitud.* Todo esto se resumía en la teoría de la *intensidad de las formas*, que fue desarrollada por el filósofo y matemático francés Oresme, quien fue el primero que intentó hacer un dibujo o gráfica que presentara el modo en que varían las cosas; él distinguió tres tipos de figuras para representar variaciones:

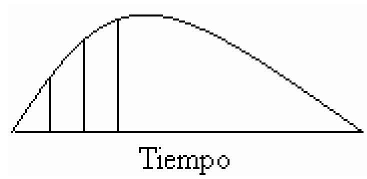
a) Variación Uniformemente Uniforme



b) Variación Uniformemente Deforme



c) Variación Deformemente Deforme



Estos esquemas son los precursores de las representaciones gráficas de las funciones constantes, lineales y no lineales.

3. El desarrollo del concepto de función en el Renacimiento

En el transcurso de doscientos años (1450 - 1650), ocurrieron varios eventos que fueron fundamentales en el desarrollo del concepto de la función:

a) La extensión del concepto del número, de donde se obtienen los números reales (hasta cierto punto) y los números complejos (Bombelli, Stifel);
b) El estudio del movimiento como un problema central de la ciencia (Kepler, Galileo);
c) La creación de un álgebra simbólica (Viéte, Descartes);
d) La unión del álgebra y la geometría (Fermat, Descartes)

- *El estudio del movimiento como un problema central de la ciencia*

Después de los griegos, el conocimiento se quedó estancado hasta el Renacimiento, durante el cual ocurrieron importantes descubrimientos geográficos y exploraciones. En 1543, Copérnico publicó su trabajo "Sobre las revoluciones de los cuerpos celestes", lo que cambió por completo el aspecto de la astronomía; en 1609 apareció "Nueva Astronomía" de

J. Kepler, conteniendo sus dos primeras leyes del movimiento planetario, y en 1618 su libro "Armonía del Mundo", conteniendo la tercera ley. Galileo, en base a su estudio de los trabajos de Arquímedes y de sus propios experimentos, da las bases para la nueva mecánica, una ciencia indispensable para la nueva tecnología.

El desarrollo posterior de la navegación, y consecuentemente de la astronomía, así como los nuevos desarrollos de la tecnología y la mecánica, necesitaron el estudio de muchos y nuevos problemas matemáticos. La novedad de esos problemas consistía principalmente en el hecho de que exigían el estudio matemático de las leyes del movimiento en el amplio sentido de la palabra. Así por ejemplo, Galileo (1.564-1.642) descubrió a partir de observaciones experimentales, la ley de caída libre de los cuerpos, estableciendo que la distancia recorrida en la caída, crece proporcionalmente al cuadrado del tiempo transcurrido. Este hecho es expresado por la bien conocida fórmula:

$$S = \frac{1}{2} g t^2$$

Aquí el tiempo t es la variable "independiente" y la distancia S es la variable "dependiente". Que S sea una función de t, significa que a cada valor del tiempo t le corresponde una distancia definida S. Tenemos entonces el surgimiento de la posibilidad de expresar analíticamente las nociones de función y magnitud variable, aunque aún este hecho debía pasar por un largo periodo de desarrollo.

- *La creación de un álgebra simbólica*

El matemático francés François Viéte, en su estudio de los polinomios, utilizó la forma de designar variables con las últimas letras del abecedario, *x, y, z, w*, para variables reales y las letras *n, m, l, k,* para referirse a variables enteras. Esta nomenclatura utilizada a mediados del siglo XVI, es muy utilizada aún en la actualidad.

- *La unión del álgebra y la geometría*

Los trabajos de Fermat y Descartes, fundadores de la Geometría Analítica (1637), evidencian la utilización de la noción de función, aunque no la enunciaron explícitamente.

Con el apoyo del desarrollo del álgebra, la introducción de signos para las operaciones, la utilización de letras para representar cantidades desconocidas y constantes, así como con los progresos alcanzados en la extensión del concepto de número, la dependencia entre variables comenzó a ser reconocida como una relación que podía representarse por medio de expresiones analíticas. Al advertir que una ecuación entre *x* e *y* expresaba dependencia entre ambas, Descartes y Fermat introdujeron el método analítico para la representación de las funciones por medio de ecuaciones algebraicas asociadas a las curvas geométricas, mientras que las curvas cuya naturaleza no era geométrica se denominaron *mecánicas.*

Descartes, mediante la representación de curvas en un sistema coordenado, determinó un método gráfico para la resolución de las ecuaciones correspondientes a dichas curvas. El cálculo algebraico llegó a su madurez en Francia gracias a la obra de Descartes y Fermat. Asimismo, Descartes se dio cuenta que todas las propiedades de una curva, como la medida del área acotada por ella, su tangente, etc., pueden determinarse completamente si se cuenta con su ecuación en dos variables.

4. El concepto de función en el Cálculo

El siglo XVII presenció la necesidad de matematizar la ciencia moderna y de la invención de la geometría analítica. Estos desarrollos sugirieron un panorama dinámico y continuo para el desarrollo del concepto de función que contrarrestaba el panorama estático y discreto predominante en la antigüedad. Tal como se describió antes, para fusionar el álgebra y la geometría, los elementos claves fueron la introducción de variables y la expresión de las relaciones entre variables por medio de ecuaciones. Más adelante surgieron gran número de ejemplos de curvas (funciones potenciales) para la etapa final de la introducción del concepto de la función.

El cálculo desarrollado por Newton y Leibniz no tuvo la forma en que se trabaja en la actualidad, en particular, no era un cálculo de funciones. Los objetos principales del estudio en el cálculo del siglo XVII eran curvas, por ejemplo, la cicloide se introdujo geométricamente y fue estudiada extensamente en este contexto antes de conocerse como una ecuación. De hecho, el análisis matemático del siglo XVII se originó como una colección de métodos para resolver los problemas acerca de curvas, encontrando entre ellos rectas tangentes, áreas bajo la curva, longitudes de curvas y velocidades de puntos moviéndose a lo largo de curvas. En vista de que los problemas tratados en cálculo eran geométricos y de naturaleza cinemática, desde que Newton y Leibniz se preocuparon por explorar las primeras aplicaciones de la maravillosa herramienta que habían creado, se requirió mucho tiempo y reflexión para que el cálculo pudiera ser transformado a su forma algebraica.

Las variables asociadas con una curva eran geométricas: abscisa, ordenada, rectas tangente, normal y radio de curvatura de una curva. En 1692, Leibniz usó palabra *función* para designar un objeto geométrico asociado con una curva. Por ejemplo, Leibniz afirmó que "*la tangente es una función de una curva*". Por otra parte, Newton introdujo el método de los flujos ("method of fluxions"), el cual se aplicaba a corrientes ("fluents") no a funciones. Newton llama a sus variables corrientes de un punto fluyendo a lo largo de una curva (similar al punto de vista geométrico de Leibniz). La mayor contribución de Newton al desarrollo del concepto de función fue el uso de las series de potencias, las cuales fueron importantes para el desarrollo subsiguiente del concepto.

Posteriormente se hizo un gran énfasis en las fórmulas y ecuaciones que relacionan a las funciones asociadas con una curva, es decir, la atención se enfocó en el papel de los símbolos que aparecen en las fórmulas y ecuaciones, así como en las relaciones entre ellos, independientemente de la curva original.

El vocablo función, y su concepto como correspondencia entre una variable dependiente y otra independiente, surge por primera vez con Leibniz y con Bernoulli, un alumno suyo; sin embargo, ellos usaron el concepto de función solamente en ejemplos aislados, tales como potencias y funciones trigonométricas. J. Bernoulli formula la siguiente definición:

> "*Llamamos función a las diversas cantidades dadas de alguna forma por una (cantidad) indeterminada x,* y *por constantes, ya sea algebraicamente o trascendentemente*" (Ruiz, 1998, p. 125)

Ésta se convierte en la primera definición de función como expresión analítica. También fue Bernoulli quien propuso la letra "f" para designar la *característica* (término debido a Leibniz), escribiendo todavía el argumento sin paréntesis: f x.

5. Euler y el concepto de función

En la primera mitad del siglo XVIII se presenció una separación gradual del análisis del siglo XVII, de su origen y estructura geométrica. Este proceso de desgeometrización del análisis generó el reemplazo del concepto de variable aplicado a objetos geométricos, por el concepto de función como una fórmula algebraica. Esta tendencia se hizo evidente en el libro clásico de Euler "*Introductio in Analysin Infinitorum*" (1748), en el que su autor intentó dar una inspección de los conceptos y métodos del análisis y la geometría analítica, necesarios para el estudio del cálculo. Este libro fue el primer trabajo en el que el concepto de función juega un papel explícito y central. En el prefacio, Euler afirma que el análisis matemático es la ciencia general de las variables y sus funciones. Él comienza definiendo una función como una expresión analítica:

> *"Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta arbitrariamente de aquella cantidad variable y números y cantidades constantes."* (Ruiz, 1998, p. 126)

Esta definición es un tanto vaga, pues el modelo "analítico" de obtención del valor de la función no está suficientemente precisado. Euler no define el término "expresión analítica" pero trata de darle significado explicando que las expresiones analíticas admitidas son aquellas que contienen las cuatro operaciones algebraicas, raíces, exponenciales, logaritmos, funciones trigonométricas, derivadas, e integrales.

Euler clasificó las funciones como algebraicas o trascendentes, de una variable o de varias variables, implícitas o explícitas. *Introductio in Analysin Infinitorum* contiene uno de los tratamientos más tempranos de funciones trigonométricas como razones numéricas, así como también el tratamiento de los logaritmos como exponentes. En esta obra todo el enfoque es algebraico, ni un solo dibujo aparece, aunque reconocía como función $y(x)$, a una curva que fuera arbitrariamente dibujada en un sistema de coordenadas x, y: Las expansiones de funciones en series de potencias juegan un papel central en este tratado, de hecho, Euler dice que cualquier función puede ser expresada como una serie de potencias; dicha observación estuvo totalmente de acuerdo con el espíritu de las matemáticas del siglo

XVIII.

En síntesis, aunque la noción de función no se originó con Euler, fue él quien le dio prominencia al tratar el cálculo como una teoría formal de funciones; además introdujo el la utilización del símbolo de función como lo conocemos hoy, es decir, $f(x)$.

Para concluir esta sección, es conveniente indicar que desde el punto de vista imperante durante el siglo XVIII, una expresión como

$$y = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

define no una, sino dos funciones, ya que predominaba el concepto de expresión analítica impuesto por Euler.

6. La controversia de la cuerda vibrante

Alrededor de 1750, D. Bernoulli, hijo de J. Bernoulli, resolvió el problema de la cuerda vibrante, expresando la solución a través de la fórmula

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} \cos\frac{n\pi at}{\ell}.$$

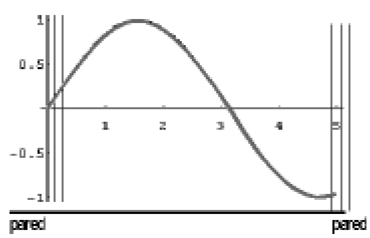


Figura 2
Onda o pulso formado sobre una cuerda tensa x fija en sus extremos.

Bernoulli observó que la elongación de la cuerda no solo depende de la posición x, sino también del instante t. El mismo problema de la cuerda vibrante fue resuelto por el matemático francés D'Alambert, mostrando que el movimiento de la cuerda es gobernado por la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

El resolvió la ecuación diferencial obteniendo la solución:

$$y(x, t) = [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)]/2$$

siendo $\varphi(x)$ una función arbitraria, determinada por la forma inicial de la cuerda.

$$y(x,0) = f(x) = \varphi(x)$$
$$\varphi(x + 2\ell) = \varphi(x),$$
$$\varphi(-x) = -\varphi(x).$$

La solución de D'Alambert era diferente a la propuesta por Bernoulli, y lo que es más importante, podía ser expresada por diferentes fórmulas para diferentes valores del argumento. En consecuencia, los matemáticos del siglo XVIII se encontraron con una contradicción insoluble: dos respuestas fueron obtenidas para el mismo problema, una expresada por una sola fórmula para todos los valores del argumento y otra por varias fórmulas. A partir de ello, surgió una amarga controversia en la cual tomaron parte todos los matemáticos prominentes de la época. La discusión, en esencia, giraba en torno al concepto de función y a la conexión entre dependencia funcional y la posibilidad de expresar esta dependencia por medio de una fórmula.

7. La Definición de Dirichlet

A principios del siglo XIX, Fourier da una nueva definición de función, haciendo notar que lo principal era la asignación de valores mediante una función y el hecho de que dicha asignación fuera llevada a cabo por una o varias fórmulas, no era de importancia.

La formalización de los resultados de Fourier fue dada por un alumno suyo, G. Lejeune Dirichlet (1805-1859), quién llega a definir por primera vez el concepto de una función *y = f(x)* de la siguiente forma:

> *"Una cantidad variable y se dice que es una función de una cantidad variable x, si para cada valor de la cantidad x, corresponde un valor determinado de una manera única, de la cantidad y."* (Ruiz, 1998, p. 132)

Esta definición fue extremadamente general, pues no se decía ni una sola palabra sobre la necesidad de dar la función por medio de una sola fórmula sobre todo el dominio de definición. Aún más, de acuerdo con ella, no era ni siquiera necesario dar una fórmula sino que podía ser definida con palabras, por ejemplo: "Si x es entero a $f(x)$ se le asignará el valor de 1 y si no lo es se le asignará el valor de 0".

Ya hacia el siglo XIX Lobatchevsky formula la siguiente definición:

> *"El concepto general exige que se denomine función de x a un número que está dado para toda x y que cambie gradualmente junto con x. El valor de la función se puede dar ya sea mediante una expresión analítica, o a través de una condición que ofrezca un medio para probar todos los números y seleccionar uno de ellos; o finalmente, la dependencia puede existir, pero permanecer desconocida*". (Ruiz, 1998, p. 134)

8. Función como una terna

Es tradicional que en los cursos de cálculo se parta de la noción de relación para estudiar funciones. Fue Peano quien propuso reducir el concepto de función a la noción de relación posiblemente porque dos movimientos de mediados del siglo XIX: el constructivismo y el intuicionismo, cuestionaban los fundamentos matemáticos. Para los primeros era necesario tener una regla para encontrar la *y* correspondiente a una *x* en contextos finitos y para los segundos la definición no era rigurosa. Era necesario entonces, introducir nociones nuevas antes de dar una definición. Russel y Whitehead desarrollaron la teoría de las relaciones.

Hacia 1920 el concepto de función es introducido a la teoría de conjuntos cuando Haussdorf propone la idea de referirla a pares ordenados.

> *"Dados dos conjuntos A* y *B una función (o aplicación) es una relación que asigna a cada elemento del conjunto A un único elemento en el conjunto B,* o *una función es una triada (X, Y ,f) donde X y Y son conjuntos y f es un subconjunto de X x Y tal que si la pareja (x,y) pertenece a f y la pareja (x,z) pertenece a f entonces y = z* o *una función f de A en B es un subconjunto del producto cartesiano A x B tal que para cada elemento a de A hay un único elemento b de B tal que (a,b) esta en f"*
> (Ruiz, 1998, p. 135)

9. Diferentes concepciones asociadas a la evolución histórica de la noción de función de acuerdo a Ruiz Higueras, Luisa. (1998, pp. 139-143)

1) Identificación de ciertas regularidades en fenómenos sujetos al cambio: relación entre cantidades de magnitudes variables.

Caracterización del concepto:
- Situaciones: Todas ligadas a los fenómenos naturales donde intervienen magnitudes físicas variables.
- Invariantes: Establecimiento de regularidades entre las relaciones de causa efecto
- Representaciones: Medidas de cantidades. Tablas.
- Momento histórico asociado: Desde la matemática prehelénica, perdurando largo tiempo.

2) Razón o proporción.

Caracterización del concepto:
- Situaciones: Todas ligadas a las magnitudes físicas y en especial en dominios tales como la Geometría o la Astronomía.
- Invariantes: Relaciones de conmensurabilidad entre magnitudes homogéneas.
- Representaciones: Las proporciones en principio se expresaban retóricamente, pasando posteriormente a expresiones tales como a:b::c:d.
- Momento histórico asociado: Desde la matemática helénica, perdurando con matemáticos tales como Oresme y Galileo.

3) Gráfica

Caracterización del concepto:

- Situaciones: Todas ligadas a las magnitudes físicas, en que las se intentaba representar gráficamente tanto la variación como las dependencias entre dichas magnitudes.
- Invariantes: Proporcionalidad entre magnitudes. Relaciones de dependencia cualitativa representada por medio de una figura que describe la cantidad de una determinada cualidad en relación con otra de la cual depende.
- Representaciones: Se usaban términos específicos: forma, latitud, longitud. Se representaba la dependencia por medios gráficos que adquirían su significado en forma global.
- Momento histórico asociado: Comenzó en las escuelas de Oxford y París en el siglo XIV y tuvo su mayor representante en Oresme.

4) Curva

Caracterización del concepto:

- Situaciones: Se trataba de buscar un método de expresión de las relaciones numéricas establecidas entre determinadas propiedades de objetos geométricos, utilizando esencialmente el método de las coordenadas. Se establecen al conectar los problemas de dos ramas de la matemática: Geometría y Álgebra.
- Invariantes: Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o línea curva. (Descartes)
- Representaciones: Ejes cartesianos, coordenadas, representación algebraica
- Momento histórico asociado: Surgió a través de los trabajos de Descartes y Fermat (s XVI-XVII) y permanece en la matemática.

5) Expresión Algebraica

Caracterización del concepto:

- Situaciones: Tanto intramatemáticas como extramatemática, por ejemplo, problemas de la Astronomía y la Mecánica, en ellos el estudio del movimiento curvilíneo y de las fuerzas que afectan el movimiento; los problemas del Cálculo Infinitesimal se intentaron resolver con aproximaciones físicas..
- Invariantes: Se identifican las cantidades variables con las expresiones analíticas, pero permanece aún la idea de asignar la variación a las cantidades. El cambio de la ley analítica o la existencia de leyes diferentes sobre dos intervalos o más de su dominio, para Euler y sus contemporáneos, determinaban una función no continua que llamarían mixta.
- Representaciones: Se introduce el término *función* y la notación $f(x)$ para expresiones analíticas
- Momento histórico asociado: Comienza con los estudios de Descartes y Fermat, prosigue con los trabajos mecanicistas y geométricos de Newton y Leibniz (siglo XVII) en los inicios del cálculo infinitesimal y continúa con los Bernoulli, Lagrange y Euler (siglo XVII- XVIII) creando poco a poco una disciplina autónoma: el Análisis Matemático.

6) Correspondencia arbitraria: Aplicación

Caracterización del concepto:

- Situaciones: Continúan surgiendo de las conexiones entre la física y la matemática, siendo muy significativo el problema de la cuerda vibrante, a partir del cual se tuvo la necesidad de crear una noción más general de función. Ser tratan también problemas existentes respecto a la continuidad de las funciones, llegando a considerar como funciones incluso aquellas de comportamiento extraño.
- Invariantes: Se llega a la noción de correspondencia arbitraria: *"Una cantidad variable y se dice que es una función de una cantidad variable x, si para cada valor de la cantidad x corresponde un valor determinado de una manera única, de la cantidad y."* Permanece aún en esta definición el carácter de asignación entre variables que continuará en su consideración posterior como aplicación.
- Representaciones: El término función se corresponde con la expresión $f(x)$, o bien con y; se representará más tarde a partir de la introducción de la teoría de conjuntos y estructuralismo boubakista como f: $X \rightarrow Y$ o bien $x \rightarrow f(x)$. Las representaciones gráficas siguen utilizando ejes cartesianos, y aparecen unas nuevas representaciones con fines didácticos: diagramas de Venn.
- Momento histórico asociado: Comienza esta consideración desde los últimos trabajos de Euler sobre funciones arbitrarias (s XVIII), continúa en el siglo XIX con los de Fourier sobre series trigonométricas y se consolida con los trabajos sobre los números reales de Cauchy, Dedekind, Lobachevsky, Riemann y Dirichlet, entre otros.

7) Función como terna $f = (F, X, Y)$

Caracterización del concepto:

- Situaciones: Todas las de variación que deban ser modeladas funcionalmente dentro de cualquier dominio científico.
- Invariantes:

$$f = (A, B, G) \Leftrightarrow G \subset A \times B \Rightarrow x \in A, y \in B \text{ tal que } (x, y) \in G$$

$$R \text{ es una función } \Leftrightarrow x, y, z, \ (x, y) \in R \text{ y } (x, z) \in R \Rightarrow y = z$$

- Representaciones: Las expresiones anteriores en cuanto a la notación y en la cuanto a las gráficas, se siguen utilizando los ejes cartesianos.
- Momento histórico asociado: A partir de la estructuración sistemática y lógica de la teoría de conjuntos, principalmente, cuando ésta se tomó como base y fundamento de toda la matemática. (finales del s XIX y principios del s. XX). (Ruiz, 1998, p. 141).

b) Análisis de programas y libros de texto

En esta sección se presentan los resultados obtenidos del análisis de los programas y libros de texto utilizados durante el primer semestre de 2005, en los cursos de Matemática Básica 1, Matemática Básica 2, Matemática Intermedia I y Matemática Intermedia II, que por fines prácticos, en lo sucesivo se hará referencia a ellos como MB 1, MB 2, MI 1 y MI 2, respectivamente.

Esta parte del estudio se realizó tomando como premisa que el libro de texto no es solamente un vehículo neutral de transmisión de conocimientos, sino que se considera un agente activo al proporcionar un marco conceptual, metodológico, epistemológico e ideológico sobre el cual se construye la concepción de la realidad natural y social del estudiante.

- **El concepto de función en el programa de MB 1**

El curso de MB 1 es el primer curso que reciben los estudiantes de la Facultad de Ingeniería y su centro de interés principal es el estudio de funciones y su utilización en la modelación y resolución de problemas.

El enfoque de la primera unidad de este programa se centra en el desarrollo de habilidades en el manejo de expresiones algebraicas, construcción de representaciones gráficas y resolución de problemas por medio de ecuaciones lineales y cuadráticas, como fundamentos para el primer acercamiento al concepto de función.

En la unidad dos se presenta el concepto de función y su desarrollo inicial se apoya en formulaciones algebraicas seguidas de su respectiva representación gráfica, para terminar con las aplicaciones en la modelación de problemas. Se profundiza en el estudio del tema al analizar los efectos que producen ciertos cambios en la expresión algebraica de una función, en la respectiva representación gráfica. Puede observarse que la secuencia en el desarrollo del concepto de función es: formulación algebraica, gráficas que se obtienen de dichas formulaciones y por último, resolución de problemas utilizando funciones.

El estudio de la geometría euclidiana se aborda desde un contexto de variación de magnitudes respecto al tiempo, para lo cual se usa en forma exclusiva un modelo cinemático lineal. En la unidad referente a funciones polinomiales, el concepto se amplía en el sentido de incluir entre las expresiones algebraicas, polinomios de grado mayor que dos; se mantiene la secuencia de estudiar la representación algebraica, construir la representación gráfica y por último modelar y resolver problemas.

En la unidad cinco el concepto de función se amplía al incluir expresiones exponenciales y logarítmicas en la ley de correspondencia. El tratamiento del concepto de función es en esencia algebraico-gráfico, con escasa referencia los dominios numérico y verbal.

La última unidad en la que se aborda la elaboración del concepto, corresponde a las funciones trigonométricas, predominando el enfoque gráfico-algebraico. La resolución de problemas se observa más centrada en la aplicación del teorema de Pitágoras, Ley de Senos y de Ley de Cosenos, que el concepto de función propiamente dicho.

Para finalizar, es conveniente anotar que en el programa de MB 1 no se incluye una unidad o sección en la cual se analicen funciones que no son susceptibles de ser expresadas por medio de fórmulas algebraicas.

- **El concepto de función en el libro de texto de MB 1**

Al comparar el programa MB 1 y el índice del libro texto, puede notarse una coincidencia casi total entre los contenidos propuestos para el curso y los desarrollados en el libro. Para abordar el concepto de función, el autor presenta ejemplos y propone ejercicios de resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas, desigualdades, así como las ecuaciones de la recta y la circunferencia. El enfoque es de tipo algebraico-gráfico, con escasos acercamientos numéricos.

En el libro de texto se define una función de la siguiente forma:
"*Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado f(x), de un conjunto B*." A continuación de la definición se lee: "*Por lo común consideramos funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales, y A se conoce como el **dominio** de la función. El símbolo f(x) se lee 1. f de x ó 2. f en x, y se denota como el **valor de f en x** o la **imagen de x bajo f.** El **rango** de f es el conjunto de todos los valores posibles de f(x) conforme x varía en todo el dominio, esto es,* $\{ f(x) \mid x \in A \}$. *El símbolo que representa un número arbitrario en el dominio de una función f se conoce como variable independiente, y el correspondiente a un número en el rango de f como variable dependiente."* (Stewart, 2001, p. 132)

La versión de la definición de función utilizada por el autor, podría conducir a pensar que una función es únicamente una regla de correspondencia. Por otra parte, el hecho de incluir solamente funciones cuyo dominio es el conjunto de números reales, provoca obstáculos en la identificación de funciones con dominios en N o en intervalos de números reales, lo cual se evidencia en las respuestas dadas por los estudiantes, las cuales se discuten en secciones posteriores.

En la misma sección el autor agrega: *"Resulta útil comparar una función con una máquina **...**, Si x pertenece al dominio de la función f, entonces cuando entra en la máquina ésta produce la salida f(x) de acuerdo con la regla de la función. Así podemos considerar el dominio como el conjunto de todas las posibles entradas y al rango como el de todas las posibles salidas.* (Stewart, 2001, p. 132)

La incidencia de esta idea en la percepción del concepto de función por parte de los alumnos, se verá reflejada en el vocabulario que utilizan y en los ejemplos que proponen.

Por otra parte, al estudiar el concepto de función polinomial se lee en la página 221 del libro de texto: *"Anteriormente hemos estudiado funciones constantes, lineales y cuadráticas que se representan respectivamente, mediante las ecuaciones f(x) = c, f(x) = mx + b,* $f(x) = ax^2 + bx + c$. *Éstos son casos especiales de una clase importante de funciones llamadas polinomios. Un **polinomio** P de **grado** n es una función de la forma*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad donde\ a_n \neq 0 \text{''}$$

En esta definición puede notarse el marcado énfasis dado al dominio algebraico del concepto, el cual también será evidentemente notorio en las respuestas dadas por los estudiantes.

En las secciones correspondientes a funciones racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, se presentan ejemplos y se propone una gran cantidad de ejercicios centrados principalmente en el dominio algebraico y el dominio gráfico del concepto de función, con escasas referencias al dominio numérico y verbal.

- **El concepto de función en el programa de MB 2**

En este curso se inicia el estudio del cálculo diferencial e integral de funciones en una variable. La primera unidad del programa se relaciona más con el estudio del concepto de límite de una función que con el concepto de función propiamente dicho, éste parece enfatizarse al estudiar a la derivada de una función como una función en sí misma. La inclusión en el programa del tema de continuidad, permite inferir que el concepto de función vuelve a tomar relevancia, además, es de esperar que se incluyan funciones definidas por partes, en los ejemplos de funciones continúas y discontinúas.

En el programa puede notarse que el estudio posterior de las derivadas se centra en el trabajo algebraico consistente en la aplicación de reglas para calcular derivadas de funciones polinomiales, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas e hiperbólicas.

Las aplicaciones de la derivada muestran la utilización de representaciones gráficas y la tendencia a utilizar tecnología para su elaboración. La presentación del tema de la integral definida y sus aplicaciones, permite suponer el tratamiento algebraico y gráfico del concepto de función, aunque esto se realice de manera indirecta debido a que el centro de interés del curso lo constituye el estudio del cálculo diferencial e integral y sus aplicaciones en la modelación y resolución de problemas, así como el concepto central del curso anterior, es el de función.

- **El concepto de función en los libros de texto del curso MB 2**

El libro de texto utilizado en el curso de MB 2 está orientado al desarrollo del cálculo diferencial e integral. Al igual que en el caso del curso anterior, puede notarse una estrecha relación entre la estructuración del programa y la secuencia de desarrollo en el libro de texto.

La primera unidad estudiada inicia con el concepto de límite, para el cual propone un acercamiento numérico apoyado en la representación gráfica de una función. Los ejercicios propuestos corresponden a funciones de variable real definidas por sus gráficas o por expresiones algebraicas. En el tema de continuidad se incluyen ejemplos y ejercicios que incluyen funciones definidas por partes, tanto en forma gráfica como algebraica, en los que no se requiere la identificación de funciones, pues se da por cierto que las expresiones y gráficas propuestas, lo son.

En el capítulo siguiente se define la derivada de una función de la siguiente forma: "$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, *dado cualquier número x para el cual este límite exista, asignamos a x el número f´(x). De modo que podemos considerar f´ como una nueva función llamada* ***derivada de f*** *y definida por medio de la ecuación anterior"* (Stewart, 2002, p. 98)

En esta definición puede notarse la importancia subyacente que tiene el concepto de función, tanto en la formulación algebraica de la derivada como en la consideración del resultado obtenido, como una función. Los ejercicios propuestos son de carácter numérico, gráfico y algebraico.

El concepto de función vuelve a ser relevante en la definición de antiderivada:

"Definición: Una función F recibe el nombre de ***antiderivada*** *de f en un intervalo I si F´(x) = f(x) para todo x en I.* (Stewart, 2002, p. 238)

En el capítulo cinco se define la integral definida y se establecen los teoremas fundamentales del cálculo, los cuales literalmente dicen (sección 5.4):

"*Las dos partes del teorema fundamental establecen una conexión entre las antiderivadas y las integrales definidas. La parte 1 afirma que si f es continua entonces* $\int_a^x f(t)dt$ *es una antiderivada de f. La parte 2 dice que* $\int_a^b f(t)dt$ *puede encontrarse evaluando F(b) – F(a) donde F es una antiderivada de f.*
Necesitamos una notación conveniente para las antiderivadas que facilite su manejo. Debido a la relación que el teorema fundamental establece entre las antiderivadas y las integrales, la notación $\int f(x)dx$ *se usa tradicionalmente para una antiderivada de f y se llama una* ***integral indefinida.*** *Así* $\int f(x)dx$ *= F(x) significa que F´(x) = f(x)"* (Stewart, 2002, p. 275)

En el párrafo anterior puede observarse el énfasis en la formulación algebraica de las expresiones utilizadas en combinación con descripciones verbales.

Por último, conviene expresar que se considera que un aporte del libro de texto a la construcción del concepto de función radica en el énfasis que hace en la aplicación del cálculo a la vida real. De hecho, presenta gran variedad de problemas extraídos de situaciones reales, incluso un número mucho mayor a los que presentaban los libros de texto de finales de los ochentas y principios de los noventas; justo es reconocer que tal énfasis demuestra el gran alcance que tiene el concepto de función y su importancia como herramienta modeladora de diversos problemas prácticos que se presentan tanto en la vida real como en el ejercicio de la ingeniería.

- **El concepto de función en los programas del curso MI 1**

Al analizar la secuencia en el desarrollo programático de este curso, parece que existiera un corte con respecto al tratamiento del concepto de función dado en los dos cursos anteriores; ya que su relevancia no es evidente en las tres primeras unidades, las cuales tratan del álgebra matricial, técnicas de integración y aplicaciones de la integral, respectivamente.

Podría esperarse el resurgimiento del papel del concepto de función en las unidades cuatro y cinco, ya que en ellas se incluyen temas referentes a curvas paramétricas y sus aplicaciones, así como la representación de funciones por medio de series de potencias, particularmente por series de Taylor y de Maclaurin. La naturaleza de estos temas, permite inferir que se enfatiza el dominio algebraico del concepto de función; además, el análisis de los objetivos del curso referentes a estas unidades permite inferir la utilización del dominio gráfico, en la representación de curvas y superficies paramétricas.

Puesto que la última unidad del programa se refiere al estudio de vectores y cónicas en el espacio tridimensional, puede esperarse que la representación gráfica de funciones sea una herramienta importante para el trabajo que se realiza.

- **El concepto de función en los libros de texto del curso MI 1**

. Particularmente, en esta sección se analizan los textos del tercer curso que reciben los estudiantes de ingeniería.

En este curso en particular se usan tres textos:

a) Algebra Lineal (Grossman, 1996)
b) Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas. (Stewart, 2002)
c) Cálculo Multivariable (Stewart, 2002)

a) **Álgebra Lineal (Grossman, 1996)**

La parte de este texto que se utiliza en el curso de Matemática Intermedia I (MI 1), comprende los capítulos 1 y 2, en los cuales se hace escasa referencia al concepto de función, ya que están enfocados en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y el álgebra matricial en general. Sin embargo, como una aplicación de los conceptos desarrollados, se presenta el modelo insumo - producción de Leontief, el cual es una herramienta ampliamente utilizada en las ciencias económicas. Aunque el tratamiento del texto a este modelo no es explícitamente el de una función, el concepto evidentemente subyace en éste y otros ejemplos.

b) **Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas (Stewart, 2002)**

El texto de Stewart se comienza a usar en MI 1 a partir del capítulo 7 titulado *Técnicas de Integración*. Este capítulo en particular se refiere al concepto de función generalmente de forma algebraica y ocasionalmente aludiendo a la representación gráfica. En la sección (7.1*), Integración por partes* (pp 469-474), se usa el concepto de derivada como función para deducir la técnica a la que alude el título, y en dos ejemplos se apoya en la representación gráfica para ampliar la presentación de la misma. Los ejercicios de esta sección aplican la técnica de integración por partes a funciones definidas en forma general, es decir, expresadas de la forma *f(x), g(x)*, etc. En el desarrollo de las restantes técnicas de integración son escasas las alusiones al concepto de función, reapareciendo en sus representaciones algebraica y gráfica, en la presentación y demostración de las reglas del punto medio, trapecio y de Simpson para la integración numérica.

La sección (8.1) *Longitud de arco* (pp 541-546), es una aplicación del concepto de integral a la representación gráfica de una ecuación. El elemento más adecuado para conectar estos conceptos es el de función, y así es definida la función longitud de arco. Idéntico papel desempeña el concepto de función en la siguiente sección, para ligar la integral a una representación gráfica, con la variante de que ésta es ahora un sólido de revolución del que se trata de determinar su área superficial. En estas dos secciones es bastante evidente que el énfasis es casi absoluto en los dominios de desempeño gráfico y algebraico. El concepto de función como una herramienta poderosa para explicar y conectar diversos fenómenos en el mundo real es utilizado en las secciones finales de este capítulo, pero estas secciones no son parte del programa del curso.

c) **Cálculo Multivariable (Stewart, 2002)**

El capítulo 10, *Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares*, es el primero de este texto y en particular la sección 10.1, titulada *Curvas definidas por ecuaciones paramétricas* (pp 641-647), representa un retorno al estudio de concepto de función, ya que vincula el trazo de curvas en el plano a un nuevo elemento: un parámetro, que para una comprensión más sencilla, se identifica primeramente con el tiempo. En general, hasta este punto de los textos existe una tendencia a hacer indistinguible el concepto de función de su gráfica, pero al abordar este tema tal distinción se hace más clara, al tener una gráfica que es determinada por una función, pero que no es propiamente la función.

La sección 10.4, denominada *Coordenadas polares* (pp 660-670) representa también un replanteamiento del concepto de función, al cambiar los parámetros usados hasta entonces. Es de hacer notar que esta redefinición nace de una concepción gráfica del concepto de función, aunque el autor se cuida de utilizar más el término "ecuación" cuando se habla de coordenadas polares y sólo ocasionalmente el término función. Esta sección, como es de esperarse, se apoya mucho didácticamente en representaciones gráficas y su conexión con representaciones algebraicas, dejando por un lado representaciones de tipo numérico, verbal o tabular.

En el capítulo siguiente, *Sucesiones y series infinitas*, se enfatiza el hecho de la conexión de las series infinitas con el cálculo, el cual "*surge de la idea de Newton de representar las funciones como sumas de series infinitas"* (p 693); el tratamiento del concepto enfatiza su dominio algebraico.

Por último, conviene destacar que aún cuando todos los temas de este capítulo serán centrales al definir los conceptos de función multivariable y función vectorial, en el texto no se trabaja con el concepto de función de manera directa, posiblemente porque se asume que el estudiante ya conoce el concepto y que maneja bien todos sus dominios de representación.

- **El concepto de función en el programa de MI 2**

El programa del curso abarca el estudio de tres grandes temas, de los cuales el primero se refiere a funciones vectoriales y funciones de varias variables, lo cual incluye su definición, representación gráfica, derivación y aplicación en la resolución de problemas de optimización. Este hecho permite afirmar que existe nuevamente un fuerte énfasis en el tratamiento del concepto de función que debiera incluir todos dominios de representación, de manera que al concluir el curso, la percepción del concepto por parte de los estudiantes debiera de ser completa y el tránsito entres los distintos dominios de representación no debiera presentar obstáculos. Sin embargo, en la sección correspondiente al análisis de las respuestas dadas por los estudiantes de este curso, se hará evidente que esto es falso en muchos casos.

La temática de las dos restantes unidades que considera este programa, así como los objetivos planteados para el curso, permiten deducir que el estudio del concepto de función pasa a un segundo plano, privilegiándose el desarrollo de habilidades en el cálculo de integrales dobles y triples, así como en su aplicación a la resolución de problemas.

- **El concepto de función en los libros de texto de MI 2**

En el curso MI 2 se usa un solo libro de texto, (*Cálculo Multivariable* (Stewart, 2002).

A continuación se presenta una revisión general de la forma en que es representado y contextualizado el concepto de función en dicho libro.

En el primer capítulo del texto se define el concepto de función vectorial y las formas de representarlo, es notable cómo el concepto de función se vincula principalmente con su representación gráfica. El capítulo empieza con una definición escueta de función: "*En general, una función es una regla que asigna a cada elemento del dominio un elemento de la imagen"* (Stewart, 2002, p 837). Continúa presentando la definición de función vectorial de la siguiente forma: "*simplemente, es una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuya imagen es un conjunto de vectores*".

Es evidente que el autor considera que el estudiante posee ya un concepto muy elaborado de función, a pesar de que en ninguno de los libros de su serie lo define formalmente. Además de las representaciones gráficas no existen referencias a otros dominios de representación para las funciones vectoriales.

El capítulo 14, *Derivadas parciales*, elabora en forma extensiva el concepto de función de varias variables, expresando desde el inicio de que serán estudiadas desde cuatro puntos de vista: verbal, numérico, algebraico y gráfico. La definición se expresa en los siguientes términos:

*Una función f de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x,y) de un conjunto D, un número real único denotado por f(x,y). El conjunto D es el dominio de f y su image**n** es el conjunto de valores que toma f, es decir {f(x,y) │(x,y) Є D}.* (Stewart, 2002, p 873).

En esta definición puede notarse la influencia de la versión conjuntista, que tal como se expresó en la sección correspondiente, corresponde con la etapa más reciente de la evolución del concepto de función.

En síntesis, el concepto de función en los textos relacionados con Matemática Intermedia 2 es trabajado intensivamente, más que en cualquier otro curso de cálculo o precálculo. Mientras los cursos anteriores se concentran todos en el estudio de funciones de una variable, en MI 2 se presenta por primera vez cuatro tipos de funciones diferentes. Existe un énfasis notorio en el uso de los dominios de representación gráfica y algebraica, con una menor atención al dominio verbal, y una escasa presencia del dominio numérico. La densidad epistemológica y conceptual de los contenidos del curso privilegian la aproximación gráfica a al concepto de función, por ser la forma más accesible de introducir al estudiante al cálculo multivariable. En las partes analizadas de los textos se sigue observando la intención de vincular su contenido con el uso de tecnologías de la información.

c) Análisis de respuestas al instrumento utilizado

- **Parte I**

En esta sección del instrumento se buscaba: indagar el concepto de función que poseen los estudiantes en cuanto al dominio matemático de los elementos que utilizan, establecer si dicha concepción se manifiesta como una elaboración personal o reproduce literalmente lo que dicen los libros de texto y si se concibe a las funciones como asociaciones o como transformaciones. Para el efecto se plantearon tres ítems que se incluyen a continuación:

1. Si tuviera que explicar a un estudiante que acaba de ingresar a la Facultad de Ingeniería, lo que es una función desde el punto de vista matemático, describa con sus propias palabras qué le diría.

2. ¿Le daría algunos ejemplos? Si: ________ No:_________
   Si su respuesta es **si**, incluya en el espacio disponible uno de los ejemplos que le daría. Si su respuesta es **no**, explique ¿por qué?.

3. ¿Le propondría algún ejercicio o problema para que lo resolviera? Si: _____ No:____
   Si su respuesta es **si**, incluya en el espacio disponible uno de los ejercicios que le propondría, indicando lo que requiere que haga. Si su respuesta es **no**, explique ¿por qué?.

El análisis de respuestas dadas en el instrumento piloto permitió la construcción de las siguientes categorías de análisis y la codificación de las variables correspondientes:

- **Dominio numérico**. Se incluyeron en este dominio expresiones como "asociación entre conjuntos de números entre los cuales se puede establecer una asociación", "evaluación de fórmulas sustituyendo números", "transformación de un número en otro".

- **Dominio algebraico**. La definición dada hace referencia a procedimientos, términos o fórmulas algebraicas, por ejemplo: igualdad, ecuación, polinomio, incógnita, etc.

- **Dominio gráfico.** Utilizan términos como: representación, gráfica, curva, línea recta, puntos del plano, parejas de puntos en el plano, etc.

- **Dominio de aplicación.** Se hace referencia a la posibilidad de resolver problemas con las funciones.

- **Conjuntista:** se hace referencia a correspondencia entre dos conjuntos de objetos.

- **Asociación** (sinónimos aplicación, relación, correspondencia): pueden describirse con palabras, utilizando flechas, diagramas de Venn, figura tipo "máquina".

- **Dependencia o transformación de variables**: "transformación de un número en otro", "expresión en la cual los números que resultan dependen de los valores con se haga la evaluación", "transformación de un conjunto de variables en otro conjunto de variables que dependen de las primeras", etc.

Los resultados obtenidos se muestran en cuadro 1, incluido en al anexo.

Se observa que el dominio numérico del concepto de función es el que se manifiesta en mayor porcentaje en el curso de MB 1 y que éste va disminuyendo conforme se avanza en los cursos restantes; paralelamente, se observa que dicho descenso se relaciona con un incremento de la manifestación del dominio algebraico, el cual llega a ser predominante. Un hecho significativo es que solo el 7.9% de la muestra total definió una función como una herramienta para resolver problemas, y de ellos el mayor número de estudiantes se ubica en él último curso (MI 2).

La información recopilada permite afirmar que la concepción de función que los estudiantes participantes manifiestan verbalmente con mayor énfasis (44.2%), corresponde al dominio algebraico. Esta tendencia se relaciona con las definiciones propuestas por Bernoulli y por Euler, incluidas en la sección correspondiente al desarrollo histórico del concepto de función.

El predominio de la concepción de una función como una formulación algebraica, también se ve apoyada en los ejemplos y ejercicios que los estudiantes propusieron. En el cuadro 2 del anexo, se observa que el 50.4% de la muestra total propone como ejemplo de función una expresión algebraica. Los porcentajes que siguen a la formulación algebraica en orden de magnitud son: aplicación y gráfica, con 18.4% y 16 % respectivamente; es significativo que los porcentajes de manifestación de estos dominios son mayores que los manifestados en la definición verbal del concepto. Es decir, las concepciones de la noción de función manifiestas a nivel declarativo por los estudiantes, empiezan a mostrar la inclusión de otros dominios del concepto, además del algebraico y del numérico, cuando se trata de proporcionar ejemplos.

En los ejercicios propuestos por los estudiantes se observa la misma tendencia, como puede verificarse al analizar el cuadro No. 3 del anexo. Nótese que el 50.1% de los estudiantes propone un ejercicio algebraico, el 15.2% propone ejercicios de aplicación, la mayoría de los cuales corresponden al uso de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

Con respecto a la tarea que predomina en el ejercicio propuesto, en el cuadro No. 4 del anexo, se observa que el mayor porcentaje de los participantes (33.0 %) escribieron una fórmula algebraica pero no indicaron que hacer con ella. Se incluye como ejemplo la siguiente respuesta dada por un estudiante.

3. ¿Le propondría algún ejercicio o problema para que lo resolviera? Si: X No:____
Si su respuesta es **si**, incluya en el espacio disponible uno de los ejercicios que le propondría, indicando lo que requiere que haga. Si su respuesta es **no**, explique ¿por qué?.

$$f(x) = 2x^5 + x^3 - 4x + 20$$

La tarea que más propusieron (14.9%) se refiere a graficar una función a partir de la expresión algebraica dada, como ilustra el siguiente ejercicio dado por un alumno. Este hecho puede explicarse al detectar que los ejercicios propuestos en los libros de texto, enfatizan este tipo de tarea. En la sección correspondiente al análisis de los libros de texto, se indicó que además se hace evidente una fuerte tendencia a privilegiar la construcciones de representaciones gráficas utilizando calculadoras graficadoras.

3. ¿Le propondría algún ejercicio o problema para que lo resolviera? Si: X No:____
Si su respuesta es si, incluya en el espacio disponible uno de los ejercicios que le propondría, indicando lo que requiere que haga. Si su respuesta es no, explique ¿por qué?.

$f(x) = -3x^2$ Grafique

El hecho anterior podría vincularse con la influencia de los libros de texto, ya que como se explicó en la sección correspondiente, justamente la tarea de graficar funciones a partir de su expresión algebraica, es una de las que más aparecen.

La aplicación del análisis de cluster a las respuestas dadas por los estudiantes en las preguntas de serie I, en cuanto al dominio del concepto de función explicitado, mostró dos resultados interesantes: una fuerte asociación entre la imagen conceptual manifestada en los ejemplos y en los ejercicios, así como una disociación notoria entre éstas y la definición conceptuales en términos verbales.

Este hecho ya había sido reportado por varios investigadores, entre ellos autores: Vinner, Dreyfuss y Tall. En particular David Tall en su investigación "Imagen conceptual y definición conceptual", dice:

"Para resaltar el rol jugado por la estructura conceptual del individuo los términos "Imagen conceptual" y "Definición conceptual" fueron introducidos por Vinner & Hershkowitz (1980) y más tarde definidos como: Usaremos el término imagen conceptual para describir la estructura cognitiva total que es asociada con el concepto la cual incluye todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados..., como la imagen conceptual cambia no necesariamente será coherente siempre..., tomaremos la porción de la imagen conceptual que es activada en un momento en particular como la imagen conceptual evocada. En diferentes momentos, imágenes conflictivas aparentes pueden ser evocadas. Solamente cuando aspectos conflictivos son evocados simultáneamente habrá una sensación de confusión. Por otro lado, la definición conceptual (es) una forma de palabras para especificar el concepto" (Tall, 1988, p. 8)

Otro hecho interesante que se hizo evidente en el análisis de las respuestas, es que los estudiantes expresaron la imagen conceptual verbal de función (definición) con base en su propio criterio y no se apegaron a definiciones formales dadas en los libros de texto. Los resultados se muestran en el cuadro No. 5 del anexo, en el que se observa que el 91.3% de los participantes expresaron una definición personal del concepto.

En cuanto al vocabulario utilizado por los alumnos, puede verse en el cuadro No. 6 que 50.9% de estudiantes conciben una función como una asociación entre elementos.

Adicionalmente, en los cuadros No. 7 y No. 8 se incluyen los resultados referentes al tipo de función propuesto como ejemplo y como ejerció, respectivamente; se observa que para el caso de los ejemplos predomina con un 34.1% la función lineal y en los ejercicios, el 26% propone funciones cuadráticas.

Por último, en el cuadro No. 9, se muestran los resultados de un cruce de variables entre el tipo de función utilizada en el ejemplo y la utilizada en el ejercicio. Puede observarse que no se mantiene fijo el comportamiento ejemplo-ejercicio, es decir, los alumnos que ejemplifican con funciones lineales, en el ejercicio proponen ejercicios de otros tipos de funciones tales como cuadrática, exponenciales, etc; sucede lo mismo con la ejemplificación cuadrática y la de otras. Lo que relaciona fuertemente el ejemplo con el ejercicio es el hecho que quienes dieron un ejemplo en el dominio algebraico plantearán un ejercicio en el mismo dominio. Esto puede observarse detalladamente en el cuadro No. 10.

- **Parte II (A y B)**

Previo a presentación de resultados de la aplicación de los modelos Matemático-Estadísticos, como lo son el Análisis Factorial y Análisis de Cluster, es importante describir el universo de estudio. Se analizaron las respuestas de la parte II (A y B), que en su totalidad consta de 17 preguntas; en ellas se representaran las variables en estudio, las cuales son cualitativas del tipo dicotómico, con la modalidad de respuesta (1=correcta o 2=incorrecta).

Los casos de observación son los estudiantes evaluados, con poblaciones de 88, 93, 83 y 105 para los cursos de MB1, MB2, MI-1 y MI-2 respectivamente, logrando constituir una matriz de datos de tamaño 369 x 17 (369 casos por 17 variables)

Como se menciona en la fundamentación teórica, una distinción importante en la diferencia entre los resultados del Análisis Factorial y los del Análisis de Cluster es, del Análisis Factorial lo que resulta es una relación lineal entre las variables, que nos permite definir un nuevo cuerpo de variables (Factores) según las cuales es posible describir la base de datos e información.

En tanto que el Análisis de Cluster lo que hace es agrupar los objetos observados, aquí cabe mencionar que se aplicó el Análisis Cluster a las variables generando cluster de variables, proporcionando una tipología de ítems que los estudiantes consideran de algún modo equivalentes de acuerdo a los patrones de similitud que se le han proporcionado al algoritmo.

El análisis de resultados se sigue luego de observar el comportamiento por separado en cada curso y luego observar el comportamiento combinando los cursos MB1-MB2, luego incrementamos a MB1-MB2-MI1, para caer a la totalidad de cursos en estudio.

La idea básica radica en detectar la evolución del concepto a lo largo de la estancia en cada curso, de acuerdo con la identificación correcta de aquellas expresiones algebraicas o representaciones gráficas que corresponden a funciones y con el tipo de la argumentación utilizada para dicha identificación.

- **Identificación de funciones a partir de expresiones algebraicas**

En la tabla I se observan las frecuencias y porcentajes de los estudiantes que identifican como una función cada una de las expresiones algebraicas propuestas en la Parte II A.

	CURSOS				
PARTE II A	**MB1**	**MB2**	**MI1**	**MI2**	**Total**
1) F. racional $y=\frac{5}{x-3}$	74 84,1%	87 93,5%	77 92,8%	96 91,4%	334 90,5%
2) F. constante $f(x)=1$	48 54,5%	62 66,7%	52 62,7%	49 46,7%	211 57,2%
3) F. implícita $5xy=8$	46 52,3%	65 69,9%	63 75,9%	78 74,3%	252 68,3%
4) Ec. círculo $x^2+y^2=25$	25 28,4%	32 34,4%	40 48,2%	62 59%	159 43,1%
5) F. trigonom. $f(x)=\lvert senx\rvert-1$	67 76,1%	85 91,4%	71 85,5%	93 88,6%	316 85,6%
6) F. dos var. $g(x,y)=x^2+y^2$	58 65,9%	72 77,4%	45 54,2%	13 12,4%	188 50,9%
7)Ec. raíz cuad. $y=\pm\sqrt{x}$	60 68,2%	52 55,9%	56 67,5%	74 70,5%	242 65,6%
8) F. por partes $y=\begin{cases} x^2 \\ 1 \\ x+1 \end{cases}$	61 69,3%	84 90,3%	72 86,7%	89 84,8%	306 82,9%
Total estudiantes	**88**	**93**	**83**	**105**	**369**

Tabla I. Frecuencias y porcentajes de estudiantes que identifican como función la expresión algebraica de cada pregunta de PII parte A

Los porcentajes mayores corresponden a las expresiones de una función racional**,** una función trigonométrica con valor absoluto y una función definida por partes. Esto puede encontrar su explicación en que dichas funciones son estudiadas como tales en todos cursos, ya sea a partir de expresiones algebraicas y representaciones gráficas, o bien en el cálculo de límites, derivadas e integrales.

Resalta que solo el 57% haya admitido que la expresión $f(x)=1$ sea una función, ya que es uno de los ejemplos clásicos en la representación algebraica de una función (caso particular de la función lineal $f(x)=ax+b$, donde a = 0 y b = 1), estudiada en el curso de MB 1.

Para la expresión $y=\pm\sqrt{x}$ que es evidente que no se trata de una función, puesto que va precedida del doble signo (±), más del 50% de los estudiantes en todos los cursos, admiten que es una función, para totalizar en un 65,6% de toda la población. La identificación de esta expresión como una función es incoherente con la definición verbal de función dada en la parte I, en la que necesariamente se hace referencia a la unicidad de la imagen, en cualquiera de los dominios del concepto.

Otro hecho interesante surge al observar que la expresión $x^2+y^2=25$ que no es función sino que representa la ecuación de una circunferencia de radio 5, es identificada como función por el 43,1% de los estudiantes; mientras que el 49% (100% - 51%) afirma que $g(x,y)=x^2+y^2$ no representa una función, a pesar de que puede identificarse como una función de dos variables. En el primer caso, este hecho llama la atención pues la ecuación de la circunferencia es de los primeros temas que se estudian en el curso de MB 1; el segundo caso es más lógico de esperar pues las funciones de varias variables se analizan hasta el curso de MI 2.

Tal como se indicó antes, en cada caso se requería que el estudiante argumentara su respuesta, tanto si identificaba la expresión una función o no. Las respuestas fueron interpretadas con base en la codificación de variables que surgió del análisis de la prueba piloto, en la cual se establecieron como categorías de análisis: aplicación, expresión algebraica, representación gráfica, dominio-imagen, variación-constancia, ecuación y otras.

Los resultados obtenidos para los estudiantes de MB 1, MB 2, MI 1 y MI 2 se presentan en las tablas II, III, IV y V, respectivamente. En las columnas se identifica el número de pregunta correspondiente.

Argumento	P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	P. 5	P. 6	P. 7	P. 8
Aplicación	11	6	3		4	2	2	9
	14,9%	12,5%	6,5%		6,0%	3,4%	3,3%	14,8%
Expre.Alg	12	9	18	6	17	10	10	22
	16,2%	18,8%	39,1%	24%	25,4%	17,2%	16,7%	36,1%
Repres.Gra		2		3	1	4	6	4
		4,2%		12%	1,5%	6,9%	10%	6,6%
Domin-Imag	28	5	8		14		8	4
	37,8%	10,4%	17,4%		20,9%		13,3%	6,6%
Variac-Cons	1	3						
	1,4%	6,3%						
Ecuación						1		1
						1,7%		1,6%
Otras	2	5	3		3	4	2	5
	2,7%	10,4%	6,5%		4,5%	6,9%	3,3%	8,2%
No respond	20	18	14	16	28	37	32	16
	27,0%	37,5%	30,4%	64%	41,8%	63,8%	53,3%	26,2%
Total	74	48	46	25	67	58	60	61
88	84%	54.6%	52.3%	28.4%	76%	65,9%	68,2%	69.4%

Tabla II. Frecuencias y porcentajes de argumentos para el curso MB 1, parte II-A

Argumento	P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	P. 5	P. 6	P. 7	P. 8
Aplicación	17	12	11	1	14	4	8	13
	19,5%	19,4%	16,9%	3,1%	16,5%	5,6%	15,4%	15,5%
Expre.Alg	19	12	33	17	33	21	7	47
	21,8%	19,4%	50,8%	53,1%	38,8%	29,2%	13,5%	56,0%
Repres.Gra		9	1	6		1	3	1
		14,5%	1,5%	18,8%		1,4%	5,8%	1,2%
Domin-Imag	27	2	2		8		8	4
	31,0%	3,2%	3,1%		9,4%		15,4%	4,8%
Variac-Cons		1			2	1		
		1,6%			2,4%	1,4%		
Ecuación						1		
						1,4%		
Otras	2	5			4	2	1	2
	2,3%	8,1%			4,7%	2,8%	1,9%	2,4%
No respond	22	21	18	8	24	42	25	17
	25,3%	33,9%	27,7%	25%	28,2%	58,3%	48,1%	20,2%
Total	87	62	65	32	85	72	52	84
93	93.6%	67%	70%	34.4%	91.4%	77.4%	55,9%	90.3%

Tabla III. Frecuencias y porcentajes de argumentos para el curso MB 2, parte II-A.

Argumento	**P. 1**	**P. 2**	**P. 3**	**P. 4**	**P. 5**	**P. 6**	**P. 7**	**P. 8**
Aplicación	18	10	13	1	12	1	6	9
	23,4%	19,2%	20,6%	2,5%	16,9%	2,2%	10,7%	12,5%
Expre.Alg	14	9	12	10	16	4	2	26
	18,2%	17,3%	19,0%	25%	22,5%	8,9%	3,6%	36,1%
Repres.Gra	2	7	2	8	3	3	5	18
	2,6%	13,5%	3,2%	20%	4,2%	6,7%	8,9%	25,0%
Domin-Imag	15	12	9	7	9	2	7	3
	19,5%	23,1%	14,3%	17,5%	12,7%	4,4%	12,5%	4,2%
Variac-Cons	10	5	6	3	8	3	9	3
	13,0%	9,6%	9,5%	7,5%	11,3%	6,7%	16,1%	4,2%
Ecuación			2			1	1	
			3,2%			2,2%	1,8%	
Otras				1	1		1	4
				2,5%	1,4%		1,8%	5,6%
No respond	18	9	19	10	22	31	25	9
	23,4%	17,3%	30,2%	25%	31,0%	68,9%	44,6%	12,5%
Total	77	52	63	40	71	45	56	72
83	93%	62.7%	76%	48%	85.6%	54.2%	67.5%	86.8%

Tabla IV. Frecuencias y porcentajes de argumentos para el curso MI 1, parte II-A

Argumento	**P. 1**	**P. 2**	**P. 3**	**P. 4**	**P. 5**	**P. 6**	**P. 7**	**P. 8**
Aplicación	10	7	2	5	8	2	5	9
	10,4%	14,3%	2,6%	8,1%	8,6%	15,4%	6,8%	10,1%
Expre.Alg	11	4	5	3	9	1	6	9
	11,5%	8,2%	6,4%	4,8%	9,7%	7,7%	8,1%	10,1%
Repres.Gra	6	7	6	22	14	2	11	19
	6,3%	14,3%	7,7%	35,5%	15,1%	15,4%	14,9%	21,3%
Domin-Imag	13	7	4	5	5	1	3	10
	13,5%	14,3%	5,1%	8,1%	5,4%	7,7%	4,1%	11,2%
Variac-Cons	30	14	16	6	23		12	8
	31,3%	28,6%	20,5%	9,7%	24,7%		16,2%	9,0%
Ecuación	2	1	24	12	3		4	5
	2,1%	2,0%	30,8%	19,4%	3,2%		5,4%	5,6%
Otras							1	3
							1,4%	3,4%
No respond	24	9	21	9	31	7	32	26
	25,0%	18,4%	26,9%	14,5%	33,3%	53,8%	43,2%	29,2%
Total	96	49	78	62	93	13	74	89
105	91.4%	47%	74.3%	59%	88.6%	12.4%	70.5%	85%

Tabla V. Frecuencias y porcentajes de argumentos para el curso MI 2, parte II-A

Analizando los argumentos que utilizan los estudiantes para justificar si las expresiones algebraicas dadas representan o no representan funciones, se observa que en los cursos MB 1 y MB 2 predomina como argumento la *Expresión Algebraica*, lo que indica que se han basado en la forma de la expresión de la formula, es decir, es suficiente para el estudiante considerar su configuración algebraica para considerarla como función. Como segundo argumento para el curso MB 1 está *Dominio-Imagen* que es cuando dan valores a la variable, en este caso para "x", para obtener valores para "y" o "f (x)"; para el curso de MB 2 el segundo argumento utilizado es el de *Aplicación* que se basa en la unicidad de la imagen para cada elemento del dominio, es decir que para cada valor de x, existe un solo valor de "y". Resalta como información en el seguimiento de la evolución del concepto de función, que a partir del curso de MB2 se empiece a diversificar en el reconocimiento de si es o no función, ya que aparece como tercer argumento utilizado, el de *Dominio-Imagen.*

Para el curso de MI-1 los argumentos utilizados están distribuidos en porcentajes muy parecidos, los argumentos son: *Expresión Algebraica, Aplicación y Dominio-Imagen***.** En un porcentaje menor al de los anteriores, aparece el argumento *Variación-Constancia* que enfatiza el cambio o constancia, como por ejemplo el hecho de que al variar x varia y.

Para el curso MI-2 es notoria la dispersión de argumentos utilizados, con porcentajes muy cercanos están: *Variación-Constancia, Representación Gráfica, Ecuación, Aplicación Expresión Algebraica y Dominio-Imagen*.

Independientemente del hecho de que la identificación funciones sea correcta o incorrecta, puede notarse que los estudiantes de los cursos MI-1 y MI-2 cuentan con más argumentos para justificar sus respuestas, lo cual puede asociarse con el grado de desarrollo alcanzado en el estudio de contenidos programáticos que involucran el concepto de función.

En las tablas anteriores se observa que para la expresión $x^2+y^2=25$, predomina la tendencia de utilizar argumentos del dominio algebraico o no responder, en el caso de la expresión. $y=\pm\sqrt{x}$, se da el mismo fenómeno.

- **Identificación de funciones a partir de representaciones gráficas**

En la sección B de la segunda parte del cuestionario utilizado, se presentaron a los estudiantes nueve representaciones gráficas en el plano cartesiano, requiriendo que identificaran en cada caso, si correspondía o no a una función. Además, se solicitaba que justificaran la respuesta dada.

En la tabla VI aparecen la frecuencia y el porcentaje de los estudiantes que identifican una función en cada una de las representaciones graficas propuestas. Dichas representaciones corresponden a funciones definidas por partes (dos lineales, cuatro lineales, lineales y no lineales), funciones constantes en los reales y en un subconjunto de los naturales, función trigonométrica, función racional, y dos gráficas que no representan funciones.

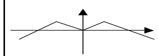
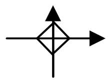
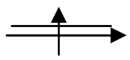
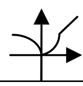
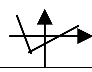
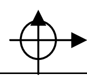
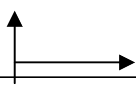
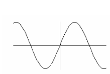
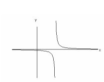
	MB1	**MB2**	**MI1**	**MI2**	**Total estudiantes**
1) F. por partes 	69 78,4%	79 84,9%	70 84,3%	87 82,9%	305 82,7%
2) No función 	12 13.6%	12 12.9%	26 31.3%	50 47.6%	100 27.1%
3) F. cte en R 	60 68,2%	71 76,3%	60 72,3%	55 52,4%	246 66,7%
4) F. por partes 	67 76,1%	84 90,3%	63 75,9%	89 84,8%	303 82,1%
5) F. por partes 	59 67,0%	82 88,2%	60 72,3%	86 81,9%	287 77,8%
6) No función 	20 22.7%	18 19.4%	40 48.2%	55 52.4%	133 36%
7) F. cte en N. 	35 39,8%	45 48,4%	41 49,4%	40 38,1%	161 43,6%
8) F. trigonom. 	77 87,5%	90 96,8%	75 90,4%	98 93,3%	340 92,1%
9) F. racional 	71 80,7%	89 95,7%	71 85,5%	95 90,5%	326 88,3%
Total estudiantes	88	93	83	105	369

Tabla VII. Frecuencias y porcentajes de identificación de la representación grafica como función

Las graficas que en mayor porcentaje son identificadas por los estudiantes como representación de una función, son la de función trigonométrica y la de función racional con porcentajes 92.1% y 88.3% respectivamente. A diferencia de un 43.6% que admite como función la grafica 7 (función constante en un subconjunto de N).

A pesar de que en las representaciones 2 (gráfica de un cuadrado) y 6 (gráfica de un círculo) se puede observar la falta de unicidad de la imagen, éstas son identificadas como funciones por el 27.1% y por el 36% respectivamente. Esta identificación errónea se presenta con la misma tendencia en todos los cursos.

En cuanto a las gráficas 1, 4 y 5 no hay diferencia significativa en su identificación como función, siendo sus porcentajes 82.7%, 82.1% y 77.8% respectivamente; por lo cual puede afirmarse que la identificación de funciones definidas por parte en forma gráfica, no representa un obstáculo para los estudiantes participantes.

Para completar los resultados anteriores, en las tablas VIII, IX, X y XI se muestran los resultados de la interpretación de los argumentos utilizados por los estudiantes de MB 1, MB 2, MI 1 y MI 2, respectivamente, para justificar sus respuestas.

Argumentos	**P. 1**	**P. 2**	**P. 3**	**P. 4**	**P. 5**	**P. 6**	**P. 7**	**P. 8**	**P. 9**
Aplicación	40 58,0%	42 55,3%	24 40,0%	23 34,3%	29 49,2%	27 39,7%	16 45,7%	19 24,7%	11 15,5%
Ideograma	3 4,3%	1 1,3%	7 11,7%	6 9,0%	4 6,8%	20 29,4%	3 8,6%	11 14,3%	3 4,2%
Exp.Algeb.	9 13,0%	2 2,6%	20 33,3%	19 28,4%	10 16,9%	8 11,8%	8 22,9%	25 32,5%	29 40,8%
Num-Imag	5 7,2%			3 4,5%	1 1,7%			1 1,3%	
Crec-Decrec	1 1,4%	1 1,3%			1 1,7%				
Cont-Discon									
Res.Prob.									
Otras	7 10,1%	7 9,2%	3 5,0%	6 9,0%	1 1,7%	3 4,4%	3 8,6%	7 9,1%	12 16,9%
No respond	4 5,8%	23 30,3%	6 10,0%	10 14,9%	13 22,0%	10 14,7%	5 14,3%	14 18,2%	16 22,5%
Total	69 78,4%	76 86.4%	60 68.2%	67 76.1%	59 67%	68 77.3%	35 40%	77 88%	71 81%

Tabla VIII. Frecuencias y porcentajes de argumentos para el curso MB 1, parte II-B.

Argumentos	**P. 1**	**P. 2**	**P. 3**	**P. 4**	**P. 5**	**P. 6**	**P. 7**	**P. 8**	**P. 9**
Aplicación	58 73,4%	61 75,3%	31 36,9%	42 56,0%	22 48,9%	42 56,0%	22 48,9%	25 27,8%	26 29,2%
Ideograma	9 11,4%	3 3,7%	1 1,2%	15 20,0%	1 2,2%	15 20,0%	1 2,2%	36 40,0%	13 14,6%
Exp.Algeb.	4 5,1%	4 4,9%	35 41,7%	10 13,3%	5 11,1%	10 13,3%	5 11,1%	12 13,3%	10 11,2%
Num-Imag	1 1,3%		4 4,8%		2 4,4%		2 4,4%	3 3,3%	2 2,2%
Crec-Decrec	1 1,3%								
Cont-Discon			1 1,2%		1 2,2%		1 2,2%		1 1,1%
Resol.Probl									
Otras	3 3,8%	7 8,6%	1 1,2%	2 2,7%	6 13,3%	2 2,7%	6 13,3%	2 2,2%	2 2,2%
No respond	3 3,8%	6 7,4%	11 13,1%	6 8,0%	8 17,8%	6 8,0%	8 17,8%	12 13,3%	35 39,3%
Total	79 85%	81 87%	84 90.3%	75 80.6%	45 48.4%	75 80.6%	45 48.4%	90 97%	89 95.7%

Tabla IX. Frecuencias y porcentajes de argumentos para el curso MB 2 parte II - B

Argumentos	**P. 1**	**P. 2**	**P. 3**	**P. 4**	**P. 5**	**P. 6**	**P. 7**	**P. 8**	**P. 9**
Aplicación	28 40%	35 61,4%	17 28,3%	17 27,0%	22 36,7%	27 62,8%	11 26,8%	14 18,7%	12 16,9%
Ideograma	12 17,1%	13 22,8%	7 11,7%	7 11,1%	8 13,3%	4 9,3%	8 19,5%	6 8,0%	12 16,9%
Exp.Algeb.	19 27,1%		25 41,7%	25 39,7%	19 31,7%	4 9,3%	6 14,6%	40 53,3%	22 31,0%
Num-Imag	2 2,9%	2 3,5%	2 3,3%	4 6,3%	3 5,0%		8 19,5%	4 5,3%	5 7,0%
Crec-Decrec	2 2,9%		1 1,7%						
Cont-Discon	2 2,9%		3 5,0%	2 3,2%	1 1,7%		1 2,4%		6 8,5%
Res.Prob.				1 1,6%	1 1,7%		1 2,4%	1 1,3%	
Otras	1 1,4%		2 3,3%		1 1,7%	1 2,3%		1 1,3%	1 1,4%
No respond	4 5,7%	7 12,3%	3 5,0%	7 11,1%	5 8,3%	7 16,3%	6 14,6%	9 12,0%	13 18,3%
Total	70 84.3%	57 68.7%	60 72.3%	63 76%	60 72.3%	43 52%	41 49.4%	75 90.4%	71 85.6%

Tabla X. Frecuencias y porcentajes de argumentos para el curso MI-1, parte II- B.

Argumentos	**P. 1**	**P. 2**	**P. 3**	**P. 4**	**P. 5**	**P. 6**	**P. 7**	**P. 8**	**P. 9**
Aplicación	22 25,3%	20 36,4%	17 30,9%	21 23,6%	18 20,9%	19 38,0%	4 10,0%	14 14,3%	14 14,7%
Ideograma	21 24,1%	13 23,6%	8 14,5%	13 14,6%	16 18,6%	15 30,0%	3 7,5%	26 26,5%	16 16,8%
Exp.Algeb.	14 16,1%		10 18,2%	18 20,2%	18 20,9%	2 4,0%	5 12,5%	38 38,8%	19 20,0%
Num-Imag	13 14,9%	8 14,5%	13 23,6%	6 6,7%	8 9,3%	3 6,0%	12 30,0%	9 9,2%	11 11,6%
Crec-Decrec	3 3,4%	1 1,8%	1 1,8%		1 1,2%			1 1,0%	4 4,2%
Cont-Discon	7 8,0%	1 1,8%		15 16,9%	8 9,3%		9 22,5%	1 1,0%	15 15,8%
Res.Prob.	2 2,3%		1 1,8%		1 1,2%		1 2,5%		
Otras	1 1,1%	1 1,8%				1 2,0%	1 2,5%		
No respond	4 4,6%	11 20,0%	5 9,1%	16 18,0%	16 18,6%	10 20,0%	5 12,5%	9 9,2%	16 16,8%
Total	87 83%	55 52.4%	55 52.4%	89 85%	86 82%	50 47.6%	40 38%	98 93.3%	95 90.4%

Tabla XI. Frecuencias y porcentajes de argumentos para el curso MI-2, parte II- B

En las tablas anteriores se observa que en los cursos de MB 1, MB 2 y MI 1 destacan los porcentajes en el argumento *Aplicación* que van desde el valor más alto observado en MB 2 con un 73,4% en la gráfica 1 (función por partes), hasta un 27.8% utilizado en la identificación la gráfica 8 (función trigonométrica); estos valores son seguido por los argumentos de los estudiantes de MI 1 con un 61.4% en la gráfica 6 (circunferencia) hasta un 17% en la gráfica 9 (función racional).

Puede notarse que para los estudiantes del curso MI 2 los argumentos son variados destacando entre los argumentos utilizados: el de *Expresión Algebraica* que varía de un 39% en la gráfica 8 (función trigonométrica) hasta un 4% en la gráfica 6 (circunferencia); enseguida aparece el argumento *Aplicación* con un 38% utilizado en la gráfica 6 (circunferencia) hasta un 10% en la gráfica 7 (función constante en un subconjunto de N). También utilizan el argumento *Ideograma* que varia desde un 30% en gráfica 6 (circunferencia) hasta un 7% en la gráfica 7 (función constante en un subconjunto de N).

Se considera importante hacer notar que es hasta en el curso de MI 2 en donde se ve un crecimiento porcentual en la utilización del argumento *Continuidad-Discontinuidad*, ya que es muy bajo en los otros cursos, a pesar de que el tema de discontinuidad se estudia en el curso de MB 2. Dicho argumento, es utilizado en la identificación de la gráfica 7 (función constante en un subconjunto de N) con un porcentaje de 22,5% y en un 1% en la identificación de la gráfica 8 (función trigonométrica).

Es notorio también que el argumento *Número–Imagen* se utilice escasamente como argumento de identificación de funciones en los cursos MB1, MB2, MI1 , aunque el mismo se usa como parte del tratamiento didáctico del concepto de función en los libros de texto de los cursos indicados. Nuevamente, es hasta en el curso de MI 2 donde este argumento aparece utilizado, alcanzando un porcentaje máximo de 30% en la grafica 7 (función constante en un subconjunto de N) hasta un mínimo de 6% en la gráfica 6 (circunferencia).

Para el argumento *Expresión Algebraica* cabe mencionar que en el curso MB1 aparece en su distribución de porcentajes como el segundo argumento mas utilizado por los estudiantes con una variación de 40.8% en la grafica 9 (función racional) hasta un 11.8% en la grafica 6 (circunferencia).

- **Clasificación obtenida por los métodos Matemático-Estadísticos**

Adicionalmente al análisis estadístico descrito en la sección anterior, a las respuestas asociadas con las correspondientes 17 variables definidas para la identificación de funciones a partir de expresiones algebraicas y representaciones gráficas, se les aplicaron métodos matemático-estadísticos del análisis multivariado de datos, particularmente, se utilizaron el análisis factorial y el análisis de cluster.

Debido a que las variables en estudio son de tipo dicotómico, se utilizó como medida de asociación entre ellas, el coeficiente de correlación de Pearson; el método jerárquico utilizado para las medidas de similitud es el método del Centroide. Para su aplicación se utilizó la versión 11.0 del paquete estadístico SPSS®.

Para los diferentes cursos se aplicaron varias veces los algoritmos mencionados, considerando como resultado del Análisis Factorial la combinación de variables que más peso tienen en los respectivos Factores; posteriormente, combinado la gráfica de sedimentación con el análisis de los Cluster generados, se seleccionaron las agrupaciones que en similitud guardan relación en su estructura, con los Factores identificados.

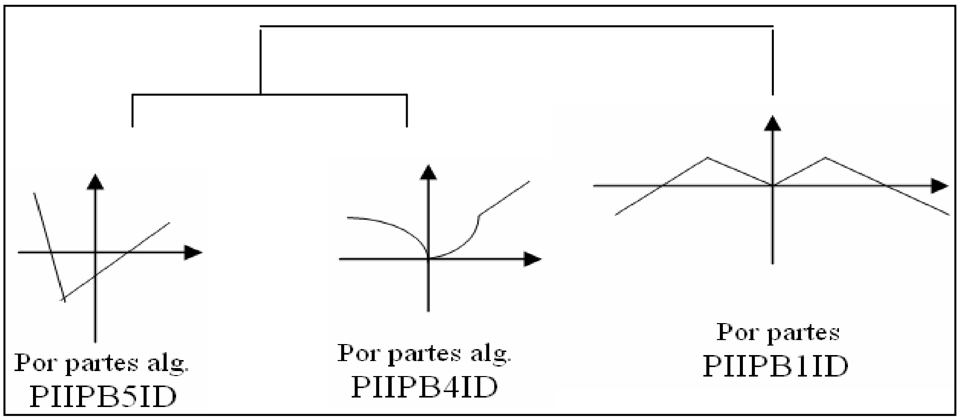
En los clusters obtenidos y escogidos por los criterios antes mencionados, para las secciones A y B de la partes II del instrumento utilizado, se diferenciaron 5 categorías para reducir las 17 variables originales.

En la descripción de dichas clases se combinan criterios relacionados con las características esenciales de las expresiones algebraicas o de las representaciones gráficas propuestas para su identificación, con el tipo de argumentación predominante en cada caso.

A continuación se presentan y describen las cinco categorías construidas.

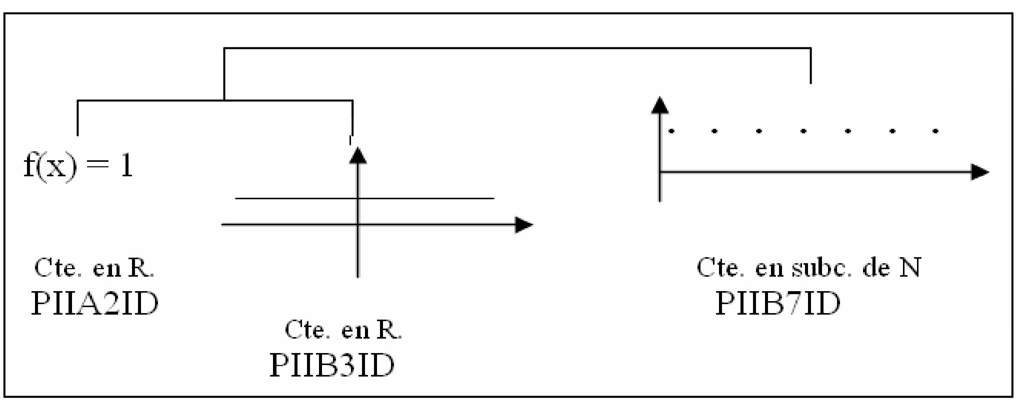
1. *La clase de las representaciones gráficas de funciones definidas por partes*: en esta categoría se agrupan representaciones gráficas de funciones definidas por partes, las cuales visualmente se perciben como continuas. El argumento en el que más se ubican las

respuestas de los estudiantes es el de Aplicación, posiblemente porque la naturaleza de las gráficas, permite la identificación como función debido a la unicidad de la imagen. En este cluster destaca una asociación primaria entre la gráfica de una función definida por partes mediante dos funciones lineales y una función definida por tres funciones, de las cuales sólo una es lineal; la segunda asociación ocurre entre éstas y una función definida por partes mediante cuatro funciones lineales.



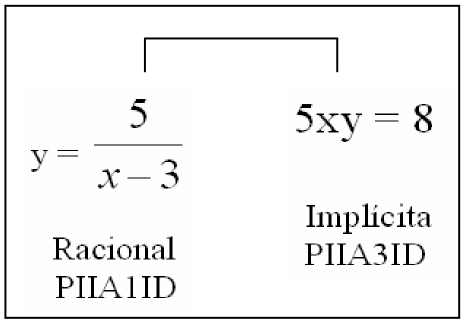
Categoría 1: Representaciones gráficas de funciones definidas por partes.

2. *La clase de las Funciones Constantes*: está configurada en dos subclases, en una de ellas se agrupan más fuertemente la representación grafica de una función constante y una expresión algebraica. Se observó que los estudiantes identifican la función constante $f(x)=1$ con su representación gráfica, es decir, han clasificado las funciones por su forma tanto gráfica como algebraica, ya que esta agrupación aparece en todos los cluster realizados para los cursos. La segunda subclase la constituye la representación gráfica de una función constante con dominio en un subconjunto de los números naturales, la cual fue identificada como función por un 43.6 % de los participantes (menos de la mitad de la población).



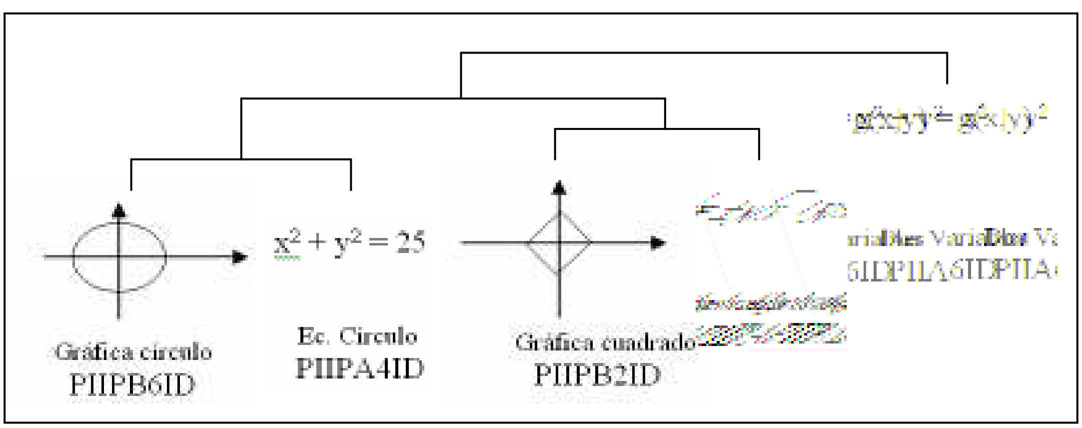
Categoría 2: Funciones constantes.

3. *La clase de las Funciones Racionales*: esta agrupación está compuesta por dos variables de la parte II A, correspondientes a expresiones algebraicas de funciones racionales, aunque la expresión 5xy = 8 es una función implícita, es fácilmente transformable en una función racional. En el análisis previo realizado para los cursos MB1, MB2 y MI-1, se observa que la mayoría de las respuestas de los estudiantes se ubican en el argumento Expresión Algebraica, es decir, se basan en la forma de la expresión de la formula**;** en seguida aparece en menor porcentaje el argumento Dominio-Imagen**.** A pesar de que en el curso de MI 2 los argumentos predominantes son ecuación y variación-constancia, se observa la permanencia de este cluster.



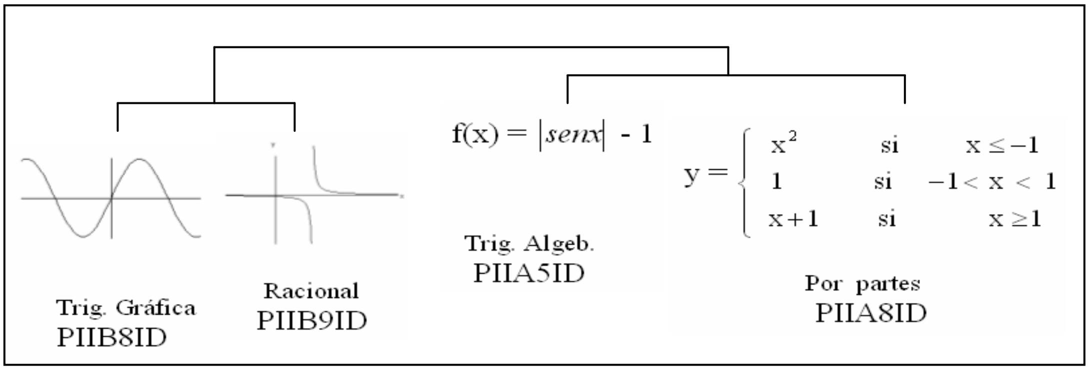
Categoría 3: Funciones racionales.

4. *La clase de las representaciones que no son funciones*: en esta clase aparece la expresión $g(x,y) = x^2 + y^2$, que siendo una función de dos variables, es considerada como no función por un 49% de los estudiantes. Se observa en una subclase la agrupación entre la representación grafica y algebraica de un círculo, que en los clusters por curso también se manifestó. Cabe mencionar que en el análisis previo a la parte II B, la agrupación era entre la gráfica del círculo y del cuadrado, lo cual indica que usan el mismo criterio para justificar la identificación realizada; en este caso el argumento de mayor frecuencia es el de Aplicación. La segunda asociación se observa entre la representación gráfica de un cuadrado y la expresión algebraica de la raíz cuadrada. Finalmente, aparece sola en una subclase la expresión algebraica de una función de dos variables.



Categoría 4: Representaciones que no son funciones.

5. *La clase de las representaciones identificadas por su forma:* en esta categoría aparecen representaciones gráficas y algebraicas de funciones que en apariencia no se relacionan entre sí, sin embargo, el análisis de los argumentos utilizados por los estudiantes en cada caso, permite detectar que ellas se identificaron a partir de analizar únicamente la estructura de la gráfica o de la fórmula propuesta. La permanencia de este cluster se observa en el análisis independiente realizado para el comportamiento de los alumnos de cada curso.



Categoría 5: Representaciones identificadas por su forma.

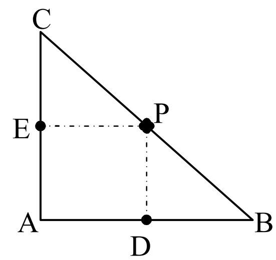
Parte III

En esta parte se buscaba indagar las concepciones de los estudiantes en cuanto la utilización del concepto de función en la modelación y resolución de situaciones problema, los contextos abarcados en las situaciones propuestas incluyen: variación geométrica, variación respecto al tiempo definido por tramos, proporcionalidad y fenómenos de la vida real que no son susceptibles de expresar por medio de una formulación algebraica. En cada caso se requería la argumentación correspondiente en cuanto a la factibilidad de modelar el fenómeno utilizando funciones.

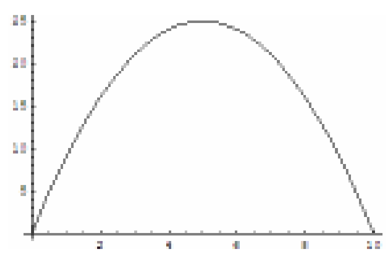
A continuación se presentan las cuatro preguntas de la parte III, incluyendo con cada una sus respectivas respuestas correctas y observaciones pertinentes a cada una, así como algunas gráficas consideradas ilustrativas de los argumentos presentados. Los cuadros de resultados a los que se refieren las observaciones aparecen en el anexo. Finalmente, se presentan conclusiones generales derivadas del análisis del conjunto total de respuestas.

Pregunta 1

Dado el triángulo rectángulo cuyos catetos miden 10 cm. cada uno, si se marca un punto **P** sobre la hipotenusa, se obtiene el rectángulo con vértices en **P, D, A** y **E**. Se quiere estudiar cómo varía el área del rectángulo cuando se hace variar la posición del punto **P** sobre la hipotenusa, desde la posición **C** hasta la posición **B**.



a) Intente dibujar una gráfica que represente la variación del área del rectángulo de acuerdo con la posición P.
La respuesta correcta aparece en la siguiente figura:

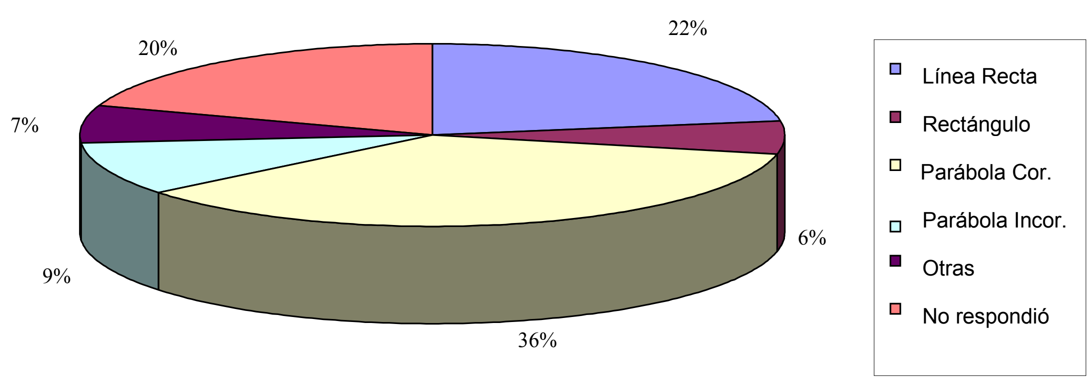


Respuesta Correcta

Las respuestas de los estudiantes pueden verse en cuadro No. 11 del anexo.

Observaciones

La respuesta que tiene el porcentaje mayor entre los estudiantes es la parábola correcta (35.8%). El curso que tiene el mayor porcentaje de respuestas correctas es el de MB2 con un 51.6%. El curso con el menor porcentaje de respuestas correctas, es MB1, con el 19.3%, lo que es significativamente menor que el resto de cursos (ver Cuadro No. 12 en el anexo). Es notable también observar que la respuesta que tiene el segundo mayor porcentaje es el rectángulo y no la parábola incorrecta. Esto podría interpretarse como una tendencia entre algunos estudiantes a confundir el esquema de una situación con la representación gráfica de una función.

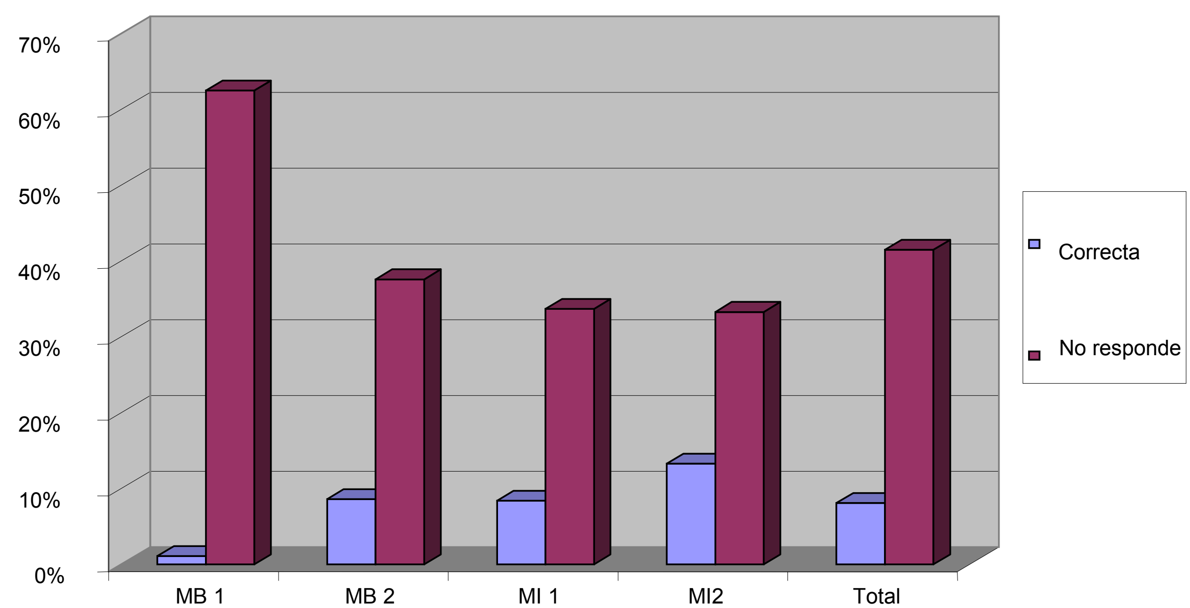


Gráfica 1. Porcentajes de respuestas totales

b) Trate de encontrar una expresión matemática que represente de modo general la variación anterior.
Respuesta correcta: A(x)= x(10-x)
Los resultados se presentan en el cuadro No. 13 del anexo.

Observaciones

Es muy notable el hecho de que en el dominio algebraico el porcentaje de respuestas correctas disminuye drásticamente. En este caso solamente el 8.1% puede dar la expresión algebraica correcta, siendo MI 2 el curso que mayor porcentaje tiene, con un 13.3% (una diferencia de 35 % con el curso que tuvo el mayor porcentaje en la pregunta anterior). Significativamente, MB1 vuelve a ser el curso que menor porcentaje de respuestas correctas reporta, con apenas el 1% (ver Cuadro No. 14 del anexo). Además, entre las opciones posibles, el mayor porcentaje (41.5%) corresponde a los sujetos que optaron por no responder la pregunta. Estas dos últimas situaciones, como se verá más adelante, son recurrentes en toda esta sección de la prueba (ver la gráfica 2).



Gráfica 2. Porcentaje de respuestas correctas y de estudiantes que no respondieron por curso

c) ¿Considera que en esta situación se puede determinar una función matemática que describa el proceso de variación del área del triángulo? Explique en detalle su respuesta.

Respuesta correcta: **Si**

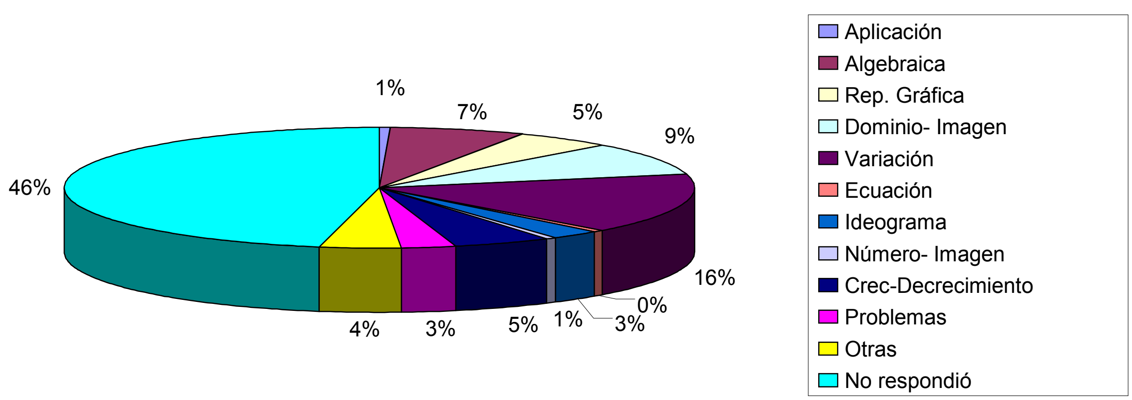
Las respuestas de los estudiantes respecto a la factibilidad de modelar la situación mediante una función y las argumentaciones utilizadas, aparecen en el cuadro No. 15 y en el cuadro 16, respectivamente.

Observaciones

Un 52.6% de los estudiantes –la mayoría- respondieron correctamente que sí era posible identificar como una función la situación del problema. El curso con el mayor porcentaje de respuestas correctas es otra vez MB2, con un 64.5%, y el curso con el menor porcentaje es, también otra vez, MB1, con un 39.8%, 12 puntos porcentuales más abajo que el curso siguiente; aunque en este caso el análisis estadístico muestra que la diferencia no es significativa, excepto para la comparación entre MB1 y MB2 (ver cuadro No. 17). Es notable también el alto porcentaje de estudiantes que no respondieron la pregunta (43.4 %), de los cuales, el porcentaje más alto también es de MB1.

En cuanto a argumentaciones, como puede verse en el cuadro No. 16, del total de posibles respuestas el porcentaje mayoritario corresponde a los casos que no respondieron, con el 46.9 %; número que es aún mayor que el porcentaje de personas que no respondieron a la variable anterior. Esto significa que hubo algunos sujetos –el 3.5%, exactamente- que a pesar de haber dado una opinión acerca de la posibilidad de obtener una función para modelar la situación presentada, no respaldaron su respuesta con argumentos. Un 61.4% de los estudiantes de MB1 no respondieron la pregunta, el cual es notoriamente mayor comparado con el 32.3% de estudiantes de MB2 que tampoco contestaron. MB2 es entonces el curso donde un mayor número de estudiantes tuvo argumentos para respaldar su opinión en cuanto a esta situación, y MB1 representa el caso contrario (ver prueba de hipótesis en el cuadro No. 17.

En cuanto a los argumentos utilizados, el de mayor porcentaje fue el de variación-constancia, que representa el 16.3% de los casos totales (30.1% entre los que respondieron), seguido del argumento de dominio-imagen (8.9%) y expresión algebraica (7%). Probablemente, el esquema presentado en el problema permite considerar la posibilidad de construir diferentes rectángulos, y consecuentemente, asociar a ellos diferentes áreas, lo que hace que la idea de variación sea la más accesible al estudiante al tratar de conectar la situación con el concepto de función.



Gráfica 3. Porcentajes de argumentaciones más usadas en la Pregunta 1 Parte III

Pregunta 2

En una línea de ensamblaje, una banda transportadora de piezas tiene un recorrido de 5 estaciones con 4 metros de separación entre cada estación. La banda transportadora dispone de un mecanismo con las siguientes características:

Tiempo que tarda en llegar a cada estación……………….5 minutos.
Tiempo de parada en cada estación……………………….7 minutos.

Moviéndose a velocidad constante, la banda transportadora realiza el siguiente recorrido: Parte de la primera estación y se detiene en la 2ª, la 3ª, y la 5ª estación.

a) ¿Es posible determinar en esta situación una función matemática? Justifique su respuesta.
Respuesta correcta: Sí.
Las respuestas de los estudiantes se muestran en el cuadro No. 19 y en el cuadro No. 20 del anexo.

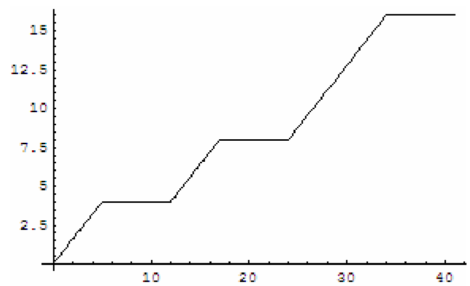
Observaciones

El porcentaje de estudiantes que identificó correctamente la posibilidad de deducir una función de la situación planteada en la pregunta 2 fue el 62.9%. De nuevo, los estudiantes de MB2 son los que mayor porcentaje correcto presentan (69.9%), y de nuevo los de MB1 son los que presentan el menor con un 50%; aunque el análisis estadístico muestra que las diferencias no son significativas, excepto para el caso MB1-MB2 (ver cuadro No. 21). Es notable observar que MB1 tiene también el mayor porcentaje (38.6%) entre quienes no contestaron, y un alto porcentaje (11.4%) entre los que lo hicieron incorrectamente. Entre éstos últimos, el porcentaje mayor corresponde a MI 1, con un 13.3%, sólo dos puntos porcentuales arriba de MB1.

En cuanto a las argumentaciones, puede observarse en la cuadro No. 20 que una vez más, el porcentaje mayor entre las posibles respuestas fue para los estudiantes que no dieron argumento alguno (32.5%). También puede concluirse que el porcentaje de estudiantes que dio alguna opinión sobre la situación de la pregunta 2 sin presentar ningún argumento fue del 4.6%. De éstos estudiantes, el mayor número y menor número volvieron a corresponder a MB1 y MB2, respectivamente. La diferencia entre MB1 y los demás cursos fue estadísticamente significativa, en tanto la diferencia entre MB2 y el resto no lo fue (ver cuadro No. 22). En cuanto a los que sí respondieron, el argumento más utilizado fue el de expresión algebraica (22%), seguido del de variación-constancia (11.4%) y dominio-imagen (10.9%). Esto probablemente pueda ligarse con la naturaleza del problema, ya que el hecho de tener una situación que puede descomponerse en varias etapas (movimiento-reposo) puede ser relacionado con una función por partes. El tránsito desde función por partes al de expresión algebraica podría entonces llevarse a cabo a través del concepto de transición "función que se expresa con varias fórmulas algebraicas".

b) Si es posible, dibuje en un sistema de ejes cartesianos, una gráfica que represente la variación del espacio recorrido por la banda transportadora, según el tiempo transcurrido desde el momento en que sale de la primera estación.

La respuesta correcta a la pregunta puede verse en la siguiente figura



Respuesta correcta

Las respuestas de los estudiantes se muestran en el cuadro No. 23 del anexo.

Observaciones

Para esta variable, el porcentaje mayor se da una vez más entre los sujetos que no respondieron (40.4%); comparando entre cursos, una vez más es MB1 el que tiene el mayor porcentaje de casos sin respuesta (51.1%) y MB2 el que tiene el menor (32.3%). Entre quienes respondieron, el mayor porcentaje es de quienes dibujaron la gráfica por partes correcta (23.3%). Por cursos, el mayor porcentaje de respuestas correctas pertenece a MB2 (35.5%) y el menor a MB1 (10.2%); esta diferencia la confirma el análisis estadístico (ver cuadro No. 24). Además, MB2 y MI1 tienen proporciones similares en esta categoría. Puede comenzarse a conjeturar una tendencia, que se tratará de explicar más adelante. De las respuestas incorrectas, la de mayor porcentaje es la gráfica de una recta, con un 21.1%, bastante cerca de la función por partes correcta.

c) Trate de encontrar una expresión matemática que represente la variación anterior.

Respuesta correcta:

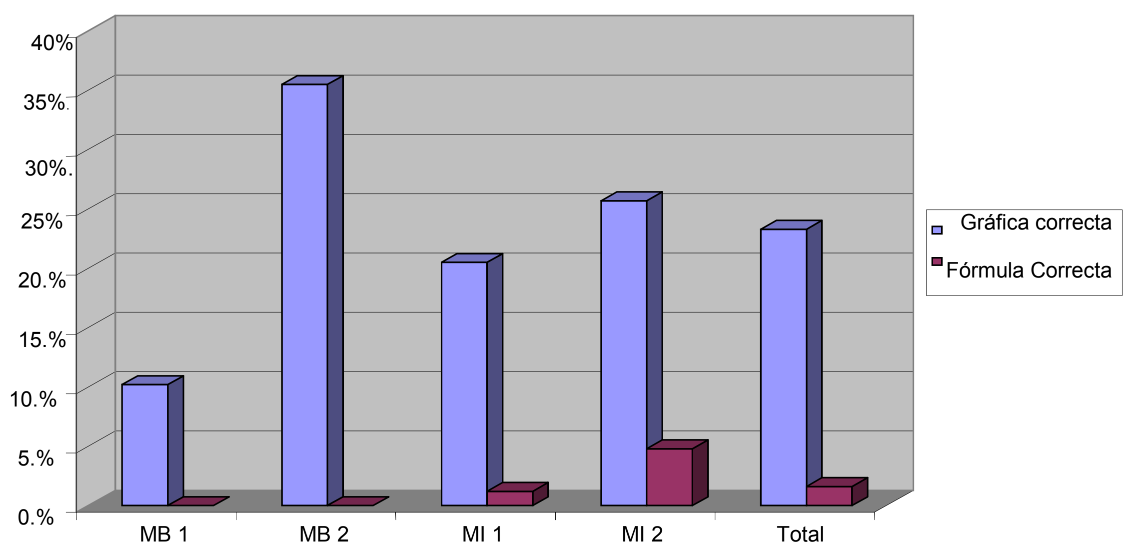
$$f(x)=\begin{cases} 0.8x & 0\le x\le 5 \\ 4 & 5\le x\le 12 \\ 0.8x-5.6 & 12\le x\le 17 \\ 8 & 17\le x\le 24 \\ 0.8x-11.2 & 24\le x\le 34 \\ 16 & 34\le x\le 41 \end{cases}$$

Variables asociadas a la pregunta fueron: estrategia utilizada, función propuesta, tipos de respuesta incorrecta. Las respuestas de los estudiantes se muestran en el cuadro No. 25, cuadro No. 26 y en el cuadro No. 28 del anexo.

Observaciones

En cuanto a las estrategias utilizadas para construir la función, un 52.6% no dejó ningún elemento por escrito del trabajo matemático que llevó a cabo para encontrar la función. Aquí hay un cambio en cuanto a la tendencia anterior: MI 2 es el curso que tiene la mayor cantidad de casos sin responder, un impresionante 72.4%. MB 2 vuelve a ser el que menos casos reporta en esta categoría con 32.3%. Estas dos observaciones son confirmadas por el análisis estadístico (ver cuadro No. 27). Entre quienes sí respondieron, la mayoría (43.9% del total, el 92.6% entre quienes respondieron) adoptó la estrategia de construir la gráfica. Es significativo el hecho de que la categoría "otras", utilizada siempre para agrupar opciones poco probables de aparecer o no registradas en la prueba piloto, no aparece, por lo que los sujetos solamente utilizaron las tres estrategias consignadas en la tabla.

El porcentaje de respuestas correctas decae notablemente, como puede observarse en el cuadro No. 26 del anexo, donde se presenta la variable "Fórmula" (PIIIP2FO) en comparación con PIIIP2F, confirmando la tendencia observada con las variables PIIIP1D y PIIIP1F en cuanto a un peor manejo del dominio algebraico con respecto del gráfico por parte del estudiante (ver la figura 6). Los casos en que no se dio ninguna respuesta en absoluto suman un 64%; por cursos el porcentaje mayor es una vez más de MB1 (76.1%) y el porcentaje menor MB2 (55.9%). Sin embargo, es de hacer notar que en ninguno de estos dos cursos hubo una sola respuesta correcta. El porcentaje de respuestas correctas en toda la prueba es del 1.6% , siendo el curso que más respuestas correctas aporta MI2 con 5 en total.



Gráfica 4. Comparación entre porcentajes de gráficas correctas y fórmulas correctas por cursos y totales para la pregunta 2 de la parte III.

La variable PIIIP2I pretende determinar que tipo de función propone el estudiante cuando responde incorrectamente. La última categoría para esta variable suma los casos que no se respondieron junto con aquellos que contestaron correctamente y que por lo tanto no son relevantes para ella. Sin embargo, como ya fue observado en la variable anterior, en esta suma el peso mayor corresponde a los casos en que no hubo respuesta. Entre quienes respondieron incorrectamente la respuesta predominante (20.3%) fue una función lineal, lo que también corresponde con lo observado en la variable PIIIP2D.

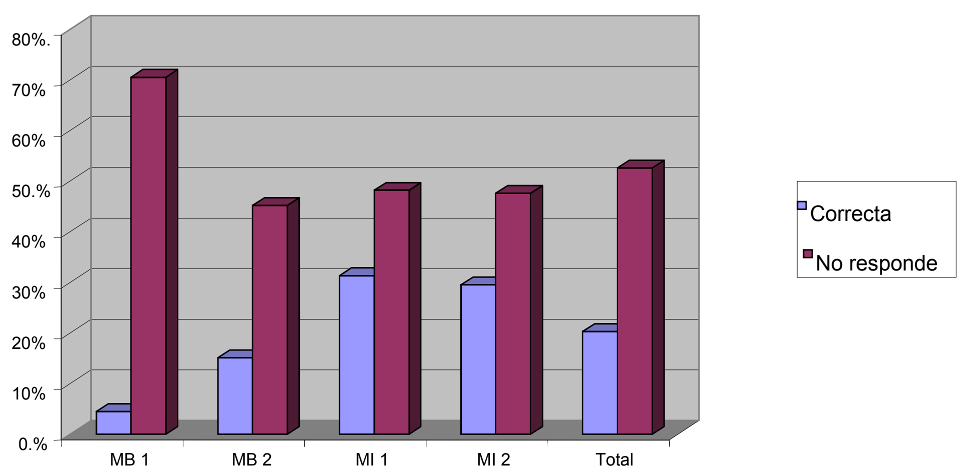
Pregunta 3

Para promocionar sus ventas, una tienda de artículos deportivos presenta a los clientes mayoristas la siguiente promoción: por la compra de cada 10 pants, le regala 6 camisetas; a su vez, le canjea grupos de 4 camisetas por 10 gorras.

a) Un comprador desea cambiar pants por gorras, aunque el dueño del almacén está dispuesto a cambiar pants por gorras, no sabe cómo hacerlo. Encuentre la relación que determina, de modo general, la equivalencia entre pants y gorras.
   Respuesta correcta: La relación es de proporcionalidad directa: por cada 4 pants recibirá 6 gorras. En todo caso, cualquier relación que guarde la misma proporcionalidad (por ejemplo: por cada 10 pants, 15 gorras).
   Relación correcta: $4p = 6g$ ó $2p = 3g$. Las respuestas de los estudiantes pueden observarse en el cuadro No. 29 del anexo.

Observaciones

Una vez más, la categoría con mayor porcentaje es la de aquellos estudiantes que no dieron ninguna respuesta (52.6%). Por curso, fueron también los estudiantes de MB1 quienes tuvieron el porcentaje más alto en esta categoría (70.5%), y los de MB2 quienes tuvieron el más bajo (45.2%); la diferencia es significativa, de acuerdo al análisis estadístico en todos los casos, excepto MB 2-MI 1. Los casos en que la relación fue expresada correctamente fueron 75 (20.3%), es decir, menos que aquellos en que la relación fue incorrecta (27.1%). Por cursos, MI 1 tuvo el porcentaje de respuestas correctas más alto (31.3%) y MB1 el más bajo (4.5%), diferencia que también es confirmada por el análisis estadístico (ver cuadro No. 30 en el anexo y gráfica 5).



Gráfica 5. Porcentaje de estudiantes que identificaron la relación correctamente y de quienes no respondieron para la pregunta 3 de la Parte III (por cursos y totales).

b) ¿Es posible determinar en esta situación una función matemática? Explique ampliamente su respuesta.

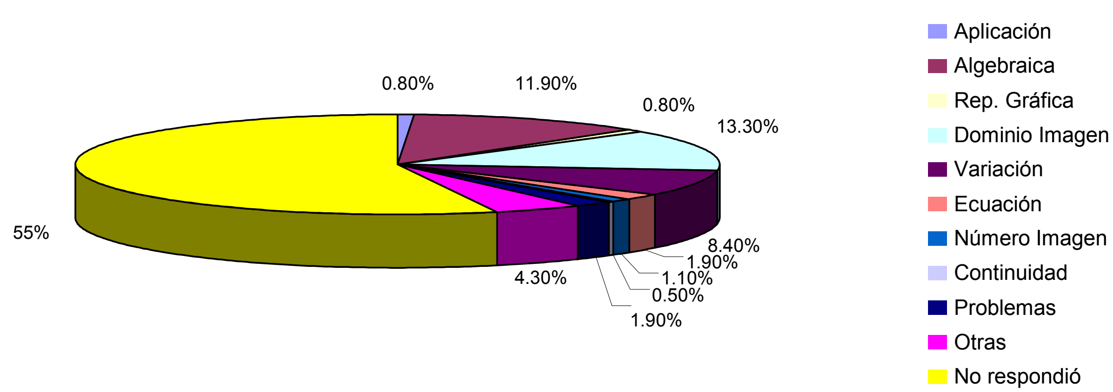
Respuesta correcta: Sí es posible.
Variables asociadas: Identificación correcta y argumentación utilizada

Las respuestas de los estudiantes aparecen en el cuadro No. 31 y el cuadro No. 32 del anexo.

Observaciones

A pesar del bajo porcentaje de aciertos en formular una relación correcta para este problema, existe una gran cantidad de estudiantes que reconoce que esta situación genera una función. Sin embargo, la categoría de no respondió sigue siendo la de mayor porcentaje con 52.8%. Una vez más, son los casos de MB 1 los que tienen el mayor porcentaje en esta categoría, con 64.8%; el curso de menor porcentaje es MI 1 (45.8%), aunque su resultado es muy cercano al de MB 2 (47.3%). Estos resultados son confirmados por el análisis estadístico, realizado mediante una prueba de hipótesis nula. Entre quienes contestaron correctamente (40.9%), la tendencia se mantiene: MB2 es el curso con mayor porcentaje de respuestas correctas (47.3%) y MB1 el que tiene el menor porcentaje (30.7%). Sin embargo, al aplicar la prueba de hipótesis nula esta tendencia no es confirmada en el caso de MB 2 (para las pruebas estadísticas, ver cuadro No. 33 del anexo).

Para la variable asociada con las argumentaciones (puede verse en cuadro No. 35) la tendencia de la categoría "no respondió" se mantiene; sigue siendo la respuesta mayoritaria con 55%. Similarmente, se mantiene la tendencia de que sean los estudiantes de MB 1 quienes no dan ninguna respuesta (67%) y los de MB 2 en menor proporción (43%). La prueba de hipótesis nula, sin embargo, no es concluyente para MB1 (caso MB1-MI2); más aún, no confirma en ningún caso la tendencia para MB2 (ver Cuadro No. 34 del anexo). Entre quienes respondieron, no hay una tendencia clara a una argumentación predominante. La de mayor porcentaje es dominio imagen (13.3%), seguida de expresión algebraica (11.9%), y en tercer lugar variación-constancia (8.4%), como puede verse en la siguiente gráfica.



Gráfica 6. Argumentaciones más utilizadas en la pregunta 3 de la parte III

Pregunta 4

De las siguientes situaciones de la vida diaria, indique cuáles puede asociar a una función y cuáles no. Explique en cada caso su respuesta y en el caso de las que se pueda asociar a una función mencione su dominio y rango.

a) La identificación de una persona por medio de su nombre completo.

Respuesta correcta: Sí es posible asociar una función cuyo dominio sea el conjunto de las personas y el rango el conjunto de los nombres.
Variables asociadas: identificación y argumentación utilizada.

Las respuestas de los estudiantes aparecen en cuadro No. 35 y en el cuadro No. 36 del anexo.

Observaciones

Los cuatro incisos de la pregunta 4 colocan al estudiante frente a situaciones en las que las funciones no necesariamente pueden ser formuladas en forma algebraica, gráfica o numérica. En este primer caso, puede observarse cómo esta condición provoca que la identificación no sea exitosa. Vemos que el porcentaje de casos en los que se contesta incorrectamente es el mayor (41.7%). Por cursos, en una tendencia contraria hasta la observada hasta ahora, es MB 2 el que presenta el mayor porcentaje de respuestas incorrectas (52.7%) y MI 2 el menor (36.2%), sin embargo las diferencias observadas no son estadísticamente significativas. En cuanto a las respuestas correctas el porcentaje total de éstas es del 33.1%, siendo el curso con mayor porcentaje MI 2 con 38.1% y el de menor porcentaje MB1 con 23.9%. En este caso, la prueba de hipótesis nula sí confirma la diferencia entre MI 2 y los demás cursos (ver cuadro No. 37 del anexo).

En cuanto a argumentaciones, una vez más el porcentaje de casos en que no hay respuesta es el mayor (43.4%). Para esta variable es aún más significativa la cantidad de casos que identifican correcta o incorrectamente la situación como función pero que no presentan argumentos para respaldar su opinión (18.2%). Por cursos, el porcentaje de quienes no dan argumentos es mayor entre MB 1 (60.2%) y menor entre MB 2 (31.2%); sin embargo, la diferencia entre los porcentajes MB 2 y MI 1 no es estadísticamente significativa (ver cuadro No. 38 del anexo). Entre quienes sí respondieron, el porcentaje mayor argumenta usando el concepto de aplicación (22.2%), seguido de quienes usan dominio imagen (10.6%).

b) La identificación de un estudiante de la USAC por medio de su número de carné.

Respuesta correcta: Sí es posible identificar una función cuyo dominio sea el conjunto de los estudiantes de la USAC y su rango el conjunto de números de carné.
Variables asociadas: Identificación y argumentación utilizada.

Las respuestas de los estudiantes aparecen en el cuadro No. 39 y en el cuadro No. 40 del anexo.
Observaciones

En este caso la respuesta predominante fue la identificación correcta, con un 62.3%. De quienes contestaron correctamente, el curso con mayor porcentaje de respuestas correctas fue MB 2, con 69.9% y el de menor porcentaje, MB 1, con 47.7%. La prueba de hipótesis nula permite afirmar que la tendencia de otras variables se mantiene en este caso, incluyendo el hecho de que la diferencia no es significativa entre MB 2 y MI1 (ver cuadro No. 41 del anexo). Es notable observar que en la pregunta anterior, al contrario de ésta, la respuesta predominante fue la identificación incorrecta. Pueden conjeturarse dos factores para explicar este contraste: primero, existe una tendencia entre los estudiantes a confundir el concepto de función con el de función uno a uno, lo que hizo que muchos identificaran incorrectamente el primer ejemplo al argumentar que habrían varios sujetos en el dominio que tendrían la misma imagen en el rango. Segundo, la falta de elementos numéricos en el primer caso y la presencia de ellos en el segundo, pudo tener una influencia en su identificación.

Para la variable argumentación, cuyos resultados se presentan en el cuadro No. 43 del anexo, se observa que la categoría predominante corresponde una vez más a quienes no dieron argumentación alguna. 16% de quienes dieron alguna opinión acerca del ejemplo no la respaldaron con argumento alguno. El curso en el que la falta de argumentos fue mayor fue MB 1 (56.8%) y el que presenta el menor porcentaje es MB 2 con 28%, aunque para éste último la diferencia no fue significativa con MI 1. Estos resultados fueron confirmados por el análisis estadístico (ver cuadro No. 42 del anexo). Entre quienes sí respondieron, la argumentación más utilizada fue aplicación (28.5% del total - un 45.3% entre quienes sí respondieron), siguiéndole dominio imagen con 9.2%.

c) El ingreso anual de una empresa.

Respuesta correcta: Sí es posible asociar una función cuyo dominio sea el conjunto de años y su rango sean los números expresados como alguna moneda.

Variables asociadas: Identificación y argumentación

Las respuestas de los estudiantes se presentan en el cuadro No. 43 y en el cuadro No. 44 del anexo.

Observaciones

En el caso de la identificación, el porcentaje mayor es otra vez el de los casos que identificaron correctamente la situación como generadora de una función (58%). Por cursos, el mayor porcentaje de respuestas correctas lo tiene MI 2 con 69.5% -aunque la diferencia no es significativa con MI 1- y el menor MB 1 (36.4%), éste último confirmado plenamente mediante análisis estadístico (ver cuadro No. 45 del anexo). La tendencia a tener la mayor cantidad de casos sin respuesta para MB 1 también se mantiene, así como el caso contrario para MB 2.

En cuanto a las argumentaciones utilizadas (resultados mostrados en cuadro No. 47 del anexo), la categoría con el porcentaje mayor corresponde otra vez a los estudiantes que no respaldaron con ningún argumento su opinión (39.6%). El porcentaje de casos que expresó opinión sin respaldarla con algún tipo de argumento sigue siendo significativo en esta sección (15.2%). De quienes no dieron argumentos, el porcentaje mayor lo tiene MB 1 con 59.1% (en este caso, no hay diferencia significativa con MI 1) y el menor lo tiene MB 2 (19.4%); ambos resultados están respaldados por el análisis estadístico (ver cuadro No. 46 del anexo). Entre quienes sí respondieron, el argumento más utilizado fue variación-constancia (19.2% del total- 47.2% entre quienes sí contestaron), seguido de aplicación (8.1%). Es importante notar el cambio de predominio de argumentación en este caso respecto a los dos anteriores, el cual puede ser interpretado como producto de la introducción de un elemento diferente en este caso, es decir, el tiempo. Al vincular un problema a una situación temporal, es posible que el sujeto asocie con mayor fuerza el concepto de variación como generador de una función más que en los casos en que el elemento tiempo no tiene influencia.

d) El número telefónico de una persona (¡tome en cuenta los celulares!)

Respuesta correcta: No es posible determinar una función si se toma como el dominio el conjunto de las personas, ya que existe la posibilidad de que a cada persona le corresponda más de un número telefónico (por ejemplo, su número residencial y su celular). Tampoco es posible determinar una función si el dominio es el conjunto de números telefónicos, ya que también a cada número telefónico pueden corresponderle varias personas (por ejemplo, un número telefónico residencial por unidad familiar).

Variables asociadas: Identificación y argumentación utilizada.

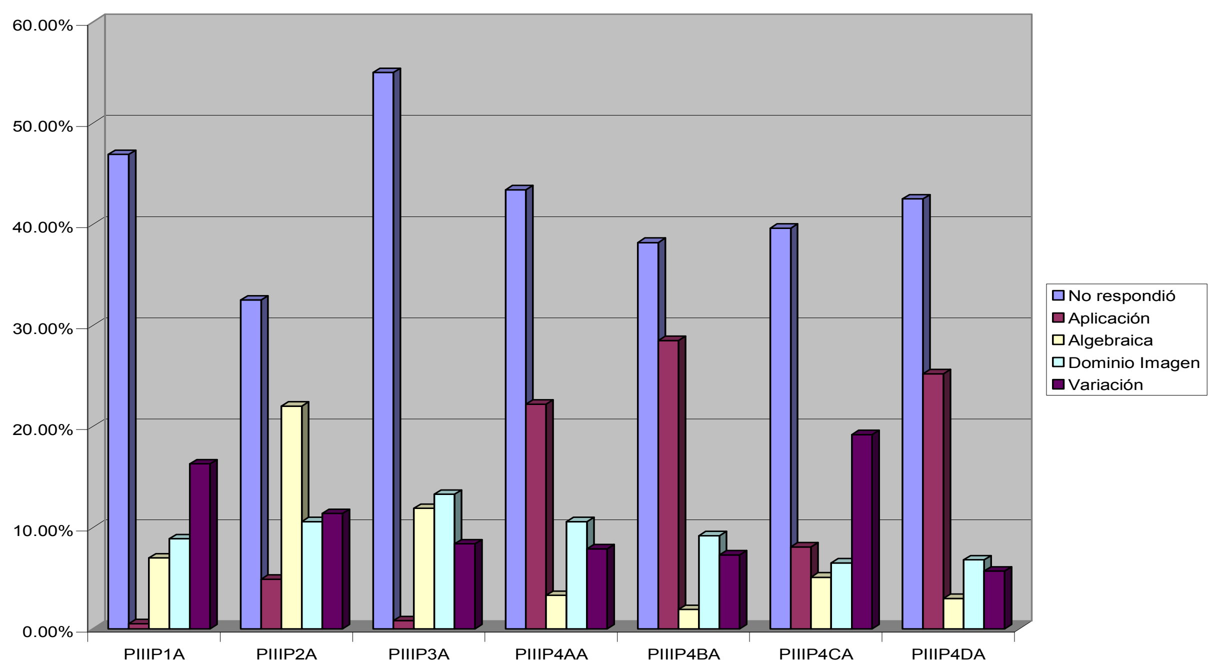
Las respuestas de los estudiantes se presentan en el cuadro No. 47 y en el cuadro No. 48 del anexo.

Observaciones

Este es el caso más complejo de los cuatro de esta pregunta, como puede observarse en su respuesta. Esto también se hace evidente en las respuestas de los estudiantes, donde ninguna de ellas predomina sobre las otras. El porcentaje de respuestas incorrectas (36.9%) es ligeramente mayor que el de las correctas (33.9%) y que el porcentaje de quienes no respondieron (29.3%). El mayor porcentaje de respuestas correctas vuelve a observarse entre los estudiantes de MB 2 (45.2%), contrastando con el menor, que también vuelve a ser MB 1 (26.1%). La situación se invierte entre quienes no respondieron; aquí el porcentaje mayor es entre MB 1 (42%) y el menor entre MB 2 (15.1%). En estos casos, sin embargo, la prueba de hipótesis nula arroja diferencias significativas para MB 1 y MB2, pero no es concluyente para el resto de comparaciones (ver cuadro No. 49 del anexo).

En el cuadro No. 50 del anexo, donde se presentan los resultados para la variable argumentación, se confirma la tendencia observada anteriormente. En este caso, el porcentaje mayor entre todas las categorías corresponde a los casos que no respondieron (42.5%). También esta vez es significativo el porcentaje de estudiantes que dio una opinión sin respaldarla (13.3%). Por cursos, es MB 1 el que mayor porcentaje de falta de respuestas tiene con un 60.2%, y MB 2 el que tiene un menor porcentaje (24.7%). El análisis estadístico es concluyente en cuanto a esta diferencia (ver cuadro No. 53 del anexo). Entre quienes sí respondieron, la argumentación más utilizada fue la de aplicación (25.2% del total – 43.8% entre quienes sí respondieron), seguida de otras (tipos de argumentaciones no clasificables en las categorías escogidas) con un 10%.

El contraste del predominio de las argumentaciones de aplicación en la pregunta 4 en comparación con las de expresión algebraica, variación constancia y dominio imagen en las tres anteriores es significativo. La gráfica 7 presenta las respuestas predominantes para las siete variables de argumentación de la parte III.



Gráfica 7. Comparación de argumentaciones predominantes para las preguntas de la parte III.

VII COMENTARIO DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

En vista de que tal como se indicó en la introducción del presente documento, en Guatemala, el estudio realizado es pionero en la investigación de las concepciones que poseen los estudiantes acerca del concepto de función, no es posible establecer comparaciones con resultados de otros estudios efectuados en nuestro país. Sin embargo, es posible realizar comparaciones con resultados obtenidos como fruto del trabajo investigativo realizado en torno al tema en Latinoamérica, especialmente en España, México y los algunos países anglo-sajones, aunque los estudios fueron realizados con estudiantes y profesores del nivel medio.

Los resultados obtenidos en la presente investigación aportan suficiente evidencia para respaldar las hipótesis generales tomadas como fundamento del marco teórico, las cuales son el fruto de los estudios mencionados. Tal como se expresa en la sección correspondiente a las conclusiones, pudo confirmarse que los estudiantes de los cursos de pre-cálculo y cálculo de la Facultad de Ingeniería de la USAC, poseen una diversidad de concepciones locales acerca del concepto de función, algunas de las cuales pueden identificarse con concepciones mantenidas históricamente y otras asociadas al tratamiento didáctico del tema, confirmándose así la primera hipótesis. En el análisis de resultados de la partes I y III del instrumento utilizado, se hizo evidente que las concepciones de la noción de función manifiestas a nivel declarativo por los estudiantes, no siempre son consistentes con las mostradas a nivel de modelación de las situaciones problema propuestas; en tal sentido, se encuentran elementos para confirmar la hipótesis 2. Análogamente, el análisis de cluster realizado a las respuestas dadas a las preguntas de la parte II, evidenció las dificultades que tienen los alumnos para transitar entre los diferentes dominios de representación del concepto de función, confirmando con esto la tercera hipótesis.

Por otra parte, pudo comprobarse que los libros de texto utilizados no son solamente un vehículo neutral de transmisión de conocimientos, sino que se convierten en agentes activos al proporcionar un marco conceptual, metodológico, epistemológico e ideológico sobre el cual se construye la concepción de la realidad natural y social del estudiante. En particular, el tratamiento didáctico dado al concepto de función en los textos analizados, aporta elementos que condicionan las concepciones que elaboran los estudiantes, lo cual se manifiesta en los ejemplos y ejercicios que proponen, así como en los argumentos que utilizan. Este hecho también fue reportado en los estudios de Ruiz (1998) con estudiantes españoles de bachillerato y por De La Rosa (2003) con profesores del nivel medio, en los cuales se reporta que el énfasis en el tratamiento algorítmico dado al concepto en muchos libros, origina una arraigada tendencia de conceptualizar una función como una formulación algebraica o una ecuación, obstaculizando el desarrollo complementario de los otros dominios cognitivos del concepto.

Se considera de suma importancia enfatizar el gran potencial de los modelos matemático-estadísticos utilizados en la realización del presente estudio, al permitir observar características de las agrupaciones de estudiantes generadas, las cuales no son evidentes a simple vista. En este sentido, se considera que la metodología utilizada genera resultados mucho más ricos y profundos al combinar procesos de interpretación cualitativa con el análisis matemático-estadístico; constituyéndose en una nueva forma de abordar el estudio de fenómenos educativos.

Como consecuencia directa de lo anterior, la investigación en el campo educativo en particular y en el área social en general, amplia la visión con que tradicionalmente se acerca a sus objetos de estudio; es decir, al basarse en la interpretación que los investigadores hacen de las respuestas dadas por los estudiantes, se reconoce la interacción entre el observador y lo observado, afirmando el carácter cualitativo de la investigación social; pero los resultados de la aplicación de modelos matemáticos para describir el comportamiento de los conglomerados, enriquecen su interpretación al incorporar componentes cuantitativas que no dependen de la opinión personal del investigador. Por otra parte, la matemática aplicada, en particular el análisis multivariado de datos, se ve enriquecida al encontrar nuevos campos de aplicación.

VIII CONCLUSIONES

El análisis de los resultados obtenidos permite elaborar las siguientes conclusiones:

1. El grado de confiabilidad establecido para el instrumento utilizado, garantiza que efectivamente se evaluaron los indicadores empíricos de las variables definidas para el estudio, validando los resultados obtenidos.

2. En los alumnos de los cursos de pre-cálculo y cálculo existe una diversidad de concepciones respecto a la noción de función, manteniendo cada una de ellas un carácter local a pesar de la intención de la ampliación y profundización de su estudio, manifiesta en el desarrollo curricular de los programas analizados. Las concepciones descubiertas se pueden clasificar de la siguiente manera: algoritmo de cálculo, expresión algebraica, representación gráfica, asociación (correspondencia entre conjuntos numéricos) y transformación.

3. Las concepciones manifestadas con mayor énfasis en los argumentos y en los procedimientos utilizados por los estudiantes, corresponden al dominio algebraico y al dominio numérico del concepto.

4. Existen inconsistencias entre el conocimiento declaratorio y el conocimiento procedimental de los estudiantes acerca del concepto de función y su aplicación en la modelación y resolución de problemas; ya que en muchos casos los estudiantes enunciaron una definición muy completa del concepto, pero no la aplicaron en la resolución de los problemas propuestos.

5. La concepción que se manifiesta con mayor énfasis en los alumnos de MB 1 respecto al concepto de función es de tipo numérico, la cual desaparece paulatinamente en el

tránsito de los estudiantes por los cursos superiores, observándose paralelamente a dicho descenso, un incremento de la manifestación del dominio algebraico del concepto.

6. Los alumnos presentan dificultades para transitar entre los diferentes dominios cognitivos del concepto de función, mostrándose en particular, escasamente desarrollada la habilidad para modelar problemas utilizando funciones, aún en los estudiantes del último curso analizado. Esto se hizo evidente en los casos en que identificaban correctamente una función a partir de expresiones algebraicas o representaciones gráficas, pero no fueron capaces de resolver ninguno de los problemas planteados o de proponer situaciones susceptibles de ser modeladas por medio de funciones.

7. Las expresiones verbales del concepto de función son elaboraciones que los estudiantes realizan de forma personal, en las que predomina la idea de que una función es una asociación entre conjuntos numéricos.

8. A pesar de que las concepciones acerca del concepto de función se diversifican a medida que los alumnos avanzan en los cursos, la marcada dificultad para modelar y resolver problemas utilizando funciones, permite afirmar que el aprendizaje del concepto es incompleto.

9. El tratamiento didáctico dado al concepto de función en los libros de texto, ejerce una fuerte influencia en la secuencia propuesta para el estudio del tema observada en los programas de los cursos. Dicha influencia se manifiesta además en los ejemplos, ejercicios y en los argumentos utilizados por los estudiantes, traduciéndose en muchos casos, en obstáculos de aprendizaje.

10. Entre los obstáculos en el aprendizaje del concepto de función que pueden asociarse con el tratamiento didáctico dado al tema en los libros de texto, pueden mencionarse:

    a) Definición del concepto como una ley de correspondencia entre conjuntos, ya que esto induce la idea de que una función es únicamente una expresión analítica.
    b) Estudio exclusivo de funciones cuyo dominio es el conjunto de los números reales o un subconjunto de ellos. Este hecho se hizo evidente en la dificultad para identificar como función una representación gráfica cuyo dominio era un subconjunto de los números naturales.
    c) Escasez de ejemplos en los cuales la función no puede ser definida mediante una expresión algebraica.
    d) Énfasis en el tratamiento algebraico del concepto de función, el cual en general deriva en procedimientos algorítmicos relacionados con el despeje de variables o con la asignación de valores como estrategia para construir representaciones gráficas.

e) Escasez de ejemplos y ejercicios que requieran el tránsito entre los diferentes dominios cognitivos del concepto de función, ya que usualmente se privilegia la utilización de alguno de ellos, que en general es de tipo algebraico o gráfico.
f) Escaso estudio de situaciones de la vida real susceptibles de ser modeladas por medio de funciones.
g) El concepto de función en sí mismo se estudia únicamente en el primer curso, los tres cursos restantes suponen completado su aprendizaje y enfatizan la ejecución de procedimientos para el cálculo de límites, derivadas e integrales.

11. Entre los obstáculos en el aprendizaje del concepto de función que pueden asociarse con su evolución histórica , pueden mencionarse:

    a) Obstáculo de la concepción algebraica: a partir del siglo XVIII la concepción predominante de función indujo a pensar que las únicas relaciones de variación dignas de estudiarse son aquellas que pueden ser representadas por medio de expresiones algebraicas o ecuaciones de otros tipos. En el presente estudio se detectó en los estudiantes una fuerte dependencia de las expresiones algebraicas manifestada tanto en la identificación de cualquier expresión algebraica como función, por el simple hecho de contar con una fórmula, así como en la dificultad de identificación de funciones en situaciones en las que no es evidente la construcción de una formulación algebraica para representarla.
    b) Obstáculo de la concepción mecánica de curva: las respuestas y argumentos dados por los estudiantes a nivel declarativo y procedimental, permiten inferir que la posibilidad de representar gráficamente el comportamiento de una función, les induce a elaborar la concepción de una función como la gráfica misma, obstaculizando la construcción de otros dominios cognitivos del concepto, ocasionando que del conocimiento acerca del concepto de función sea incompleto y además, fragmentado.

12. Como resultado del análisis de cluster realizado a las respuestas dadas por los estudiantes en la parte II del instrumento utilizado, se obtuvo una categorización de los expresiones algebraicas y representaciones gráficas propuestas, que reflejan la similitud en el comportamiento de los alumnos ante dichas situaciones. Las clases construidas son: la de las representaciones gráficas de funciones definidas por partes, la de funciones constantes, la de representaciones algebraicas de funciones racionales, la de representaciones que no son funciones y la representaciones identificadas por su forma.

13. El análisis de cluster realizado evidenció una fuerte semejanza entre las agrupaciones construidas individualmente para cada curso y la agrupación observada en la muestra total. Este hecho evidencia que el comportamiento de los estudiantes ante las situaciones propuestas es independiente del curso en el cual se ubican, en consecuencia, es posible afirmar que la elaboración del concepto de función no

evoluciona significativamente en el tránsito de los alumnos por los diversos cursos, como sería de esperarse. Lo que se diversifica son los argumentos que utilizan y las habilidades algorítmicas que posiblemente adquieren para el cálculo de límites, derivadas e integrales.

IX RECOMENDACIONES

Para superar los obstáculos didácticos y epistemológicos, que presentan los estudiantes de la Facultad de Ingeniería, en el aprendizaje del concepto de función, se considera importante tomar en consideración lo siguiente:

1. Para abordar el estudio del tema, deberá presentarse a los estudiantes situaciones de variación tanto de la vida real como del campo profesional de la ingeniería, en las que no sea posible el planteamiento de una formulación algebraica y sin embargo, puedan modelarse por medio de una función. Dichas situaciones deberán diseñarse de manera que se incluyan relaciones de variación geométrica, variación respecto al tiempo, proporcionalidad, entre otras.

2. En el tratamiento del concepto en el curso de MB 1, los profesores deberán trascender las definiciones dadas en los libros de texto utilizados, con el propósito de ampliar la visión predominante en ellos respecto a considerar una función únicamente como una ley de correspondencia. Asimismo, será necesario incluir ejemplos en los cuales el dominio de una función sea algún conjunto numérico diferente de los números reales.

3. Se sugiere que en el desarrollo de los contenidos correspondientes a los cursos de MB 2, MI 1 y MI 2, no se asuma completado el aprendizaje del concepto de función, sino que el mismo sea profundizado, a través del estudio del cálculo diferencial e integral.

4. Proponer a los estudiantes situaciones didácticas en las cuales sea necesario involucrar los diversos dominios cognitivos del concepto sin privilegiar ninguno, con el propósito de inducir la vinculación coherente entre las diferentes formas de representar funciones.

5. En el desarrollo de todos los cursos, se deberá enfatizar el potencial de las funciones como herramientas para modelar y resolver problemas de diversa índole.

6. En estudio del concepto de función, deberá evidenciarse que si bien es cierto que una de las formas de representar muchas funciones es a través de una expresión analítica, existen muchas fórmulas y ecuaciones que no representan a una función. Es decir, debe hacerse evidente a los estudiantes que el concepto de función no es equivalente al de expresión analítica.

7. En estrecha relación con la recomendación anterior, se sugiere evidenciar a los estudiantes que si bien es cierto que es posible construir la representación gráfica de una función, la gráfica no es en sí misma la función; adicionalmente, conviene

mostrar a los alumnos ejemplos de gráficas que no corresponden a la representación de funciones.

8. En vista de la evolución histórica del concepto de función, se sugiere la reflexión y discusión por parte del grupo de profesores del Departamento de Matemática, acerca de las concepciones predominantes en cada etapa de dicho desarrollo y la influencia de cada una de ellas en el surgimiento de obstáculos de aprendizaje.

9. En vista de que los libros utilizados son elaborados para estudiantes de otros contextos, se considera de suma urgencia el diseño de materiales de apoyo para el aprendizaje del concepto de función, en los cuales se incluyan las sugerencias anteriores.

10. Para complementar el presente estudio, se recomienda profundizar en esta línea de investigación, en busca de indagar las concepciones que poseen los profesores universitarios acerca del concepto de función, así como el tratamiento didáctico dado al tema directamente en los salones de clases.

11. Como recomendación metodológica para los estudios en que se apliquen los modelos matemático-estadísticos utilizados en la presente investigación, debe tomarse en cuenta que en la aplicación del análisis factorial en la reducción de variables observables, la utilización de los criterios de sedimentación o de prueba de KMO y Bartlett no debe ser exclusiva para generar los factores. Los resultados obtenidos son más completos al combinar estos criterios con el análisis de cluster, para determinar los factores a retener.

X BILBIOGRAFIA

1. **Aldenderfer, M.** (1984). *Cluster Analysis.* E.U.A.: Sage University Paper.

2. **Anastasi, A & Urbina, S.** (1998). *Test psicológicos.* 7ª. Edición. México: Editorial Prentice Hall.

3. **Artigue**, M. (1989**).** *Espistemologie et didactique***.** Cahier de DIDIREM, 3. IREM. París. Université Paris VII.

4. **Brennan, R.** (1992). *Elements of generalizability theory.* 2a. edición. E. U. A.: American Collge Testing program.

5. **Chatfield, Ch.** (2004). The *Analysis of Time Series.* 6ta. Edición. E.U.A.: Editorial Chapman & Hall/CRC.

6. **Chevallard, Y.** (1991) *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Editorial Aique.

7. **De La Rosa**, A. (2003) *Errores e inconsistencias en la enseñanza del concepto de función en el docente.* México: El Grado De Visualización. Mosaicos Matemáticos No. 11.

8. **Dillon, W.** (1984). *Multivariate Analysis Methods and Applications*. USA: John Wiley & Sons.
9. **Dolores, C**. (2002). *Un estudio acerca de las concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de funciones elementales*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, volumen l5, año 2002, tomo 1, pp 73-78. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

10. **Duval, R.** (1998). *Registros de presentación semiótica y funcionamiento cognitivo de pensamiento.* Investigaciones en Matemática Educativa II, pp. 173-207. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

11. **Gatica, N.** (2002). *El concepto de función en textos universitarios*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, volumen l5, año 2002, tomo 1, pp 131-136 México: Grupo Editorial Iberoamérica.
12. **Grimaldi, R**. (1994). *Matemáticas Discretas y Combinatoria*. 3ª edición. E.U.A.: Addison-Wasley.

13. **Herstein,** I..(1988). *Álgebra Moderna*. 1ª edición. E.U.A.: Blaisdell.

.

14. **Hitt, F.** (1996). *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos*. Investigaciones en matemática educativa, pp. 245-264. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

15. **Jaccard, J.** (1998). *Interaction effects in factorial analysis of variance.* E.U.A. Sage University Paper.

16. **Jae-On K. and Charles M.**. (1978) *Introduction to factor factor analysis.* E.U.A.: Sage University Paper.

17. **Kleiner, I.** (1989) *Evolution of the Function Concept: A Brief Survey*. E.U.A.: The College Mathematics Journal, Volumen 20, Número 4.

18. **Kline, P.**. (1994) *An easy guide to factor analysis.* 1a. edición. E.U.A.: Taylor and Francis Group.

19. **Larson, R y col.** (1999). *Cálculo: Volumen 2*. 6a. edición. México: Mc Graw-Hill.

20. **Merino, C. y Lautenschlager**, **G.** (2003). *Comparación estadística de la confiabilidad Alfa de Cronbach: Aplicaciones en la medición Educacional y Psicológica* Vol XII. No 2 pp 127-136.

21. **Pérez, César** (2001). *Técnica Estadísticas con SPSS*. España: Prentice-Hall

22. **Piña-López, J**. (2003) *Validación de un instrumento para medir competencias conductuales en personas VIH positivas*. México: Revista Salud pública de, Vol 45, No. 4.

23. **Ponte, J.** (1990). *The History of the Concept of Function and Some Educational Implications*. Journal Educação e Matemática No. 15. Portugal: Asociación Portuguesa de Profesores de Matemática.

24. **Pulido, A.** (1981). *Estadística y técnicas de investigación social*. Madrid: Ediciones Pirámide.

25. **Ruiz, L.** (1998). *La Noción de Función: Análisis Espistemológico y Didáctico*. España: 1ª edición Universidad de Jaén. 1998.

26. **Rummel, R.** (1970). *Aplied Factor Anslysis.* E.U.A.: Exanstons, Noth Western University Press.

27. **Sheldon, R.** (1999). *Simulación.* 2ª. Edición. México: Editorial Prentice Hall.

28. **Stewart, J**. (2002). *Cálculo Multivariable*. 4ª Edición. México: Editorial Thomson-Learning.

29. **Stewart, J**. (2002). *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas*. 4ª Edición. México: Editorial Thomson-Learning.

30. **Stewart, J**. (2001).. *Precálculo*. 3ª Edición. E.U.A: Editorial Brooks /Cole.

31. **Tall, D**. (1988) *Concept image and concept definition*. E:U:A.:University of Warwick.

Cuadro No1. Distribución de resultados por dominio de la definición y curso

	Curso																			
	Matemática Básica 1			Matemática Básica 2			Matemática Intermedia 1			Matemática Intermedia 2			Total de la muestra							
Dominio de la definición	**Total**	**% respecto del total del Curso**	**% del total del Dominio de la definición**	**Total**	**% respecto del total del Curso**	**% respecto del total del Dominio de la definición**	**Total**	**% respecto del total del Curso**	**% respecto del total del Dominio de la definición**	**Total**	**% respecto del total del Curso**	**% respecto del total del Dominio de la definición**	**Total**	**% respecto del total del Curso**	**% respecto del total del Dominio de la definición**	**% of Total**				
Numérico	33	37,5	44,6	23	24,7	31.1%	11	13,3	14.9%	7	6,7	9.5%	74	20.1%	100.0%	20.1%				
Gráfico	8	9,1	23,5	5	5,4	14.7%	8	9,6	23.5%	13	12,4	38.2%	34	9.2%	100.0%	9.2%				
Algebraico	29	33,0	17,8	36	38,7	22.1%	38	45,8	23.3%	60	57,1	36.8%	163	44.2%	100.0%	44.2%				
Aplicación	0	0,0	0,0	9	9,7	31.0%	4	4,8	13.8%	16	15,2	5 5.2%	29	7.9%	100.0%	7.9%				
No respondio	8	9,1	72,7	1	1,1	9.1%	2	2,4	18.2%		0,0		11	3.0%	100.0%	3.0%				
Conjuntista	10	11,4	17,2	19	20,4	32.8%	20	24,1	34.5%	9	8,6	15.5%	58	15.7%	100.0%	15.7%				
Total	**88**	**100,0**	**23,8**	**93**	**100,0**	**25.2%**	**83**	**100,0**	**22.5%**	**105**	**100,0**	**28.5%**	**369**	**100.0%**	**100.0%**	**100.0%**				

Cuadro No 2. Distribución de resultados por dominio del ejemplo y curso

	Curso														
	Matemática Básica 1			**Matemática Básica 2**			**Matemática Intermedia 1**			**Matemática Intermedia 2**			**Muestra total**		
Dominio del ejemplo	Total	% respecto del total de la muestra del curso	% respecto del Dominio del ejemplo	Total	% respecto del total de la muestra del curso	% respecto del Dominio del ejemplo	Total	% respecto del total de la muestra del curso	% respecto del Dominio del ejemplo	Total	% respecto del total de la muestra del curso	% respecto del Dominio del ejemplo	Total	% respecto del total de la muestra del curso	% respecto del Dominio del ejemplo
Numérico	11	12.5	52.4	2	2.2	9.5	3	3.6	14.3	5	4.8	23.8	21	5.7	100.0
Gráfico	7	8.0	11.9	18	19.4	30.5	8	9.6	13.6	26	24.8	44.1	59	16.0	100.0
Algebraico	37	42.0	19.9	54	58.1	29.0	49	59.0	26.3	46	43.8	24.7	186	50.4	100.0
Aplicación	8	9.1	11.8	14	15.1	20.6	18	21.7	26.5	28	26.7	41.2	68	18.4	100.0
No respondio	7	8.0	53.8	2	2.2	15.4	4	4.8	30.8		0.0	0.0	13	3.5	100.0
Conjuntista	18	20.5	81.8	3	3.2	13.6	1	1.2	4.5		0.0	0.0	22	6.0	100.0
Total	**88**	**100.0**	**23.8**	**93**	**100.0**	**25.2**	**83**	**100.0**	**22.5**	**105**	**100.0**	**28.5**	**369**	**100.0**	**100.0**

Cuadro No 3. Distribución de resultados por dominio del ejercicio y curso

	Curso														
	Matemática Básica 1			**Matemática Básica 2**			**Matemática Intermedia 1**			**Matemática Intermedia 2**			**Muestra total**		
Dominio del ejercicio	**Total**	**% respecto del total de la muestra del curso**	**% respecto del Dominio del ejercicio**	**Total**	**% respecto del total de la muestra del curso**	**% respecto del Dominio del ejercicio**	**Total**	**% respecto del total de la muestra del curso**	**% respecto del Dominio del ejercicio**	**Total**	**% respecto del total de la muestra del curso**	**% respecto del Dominio del ejercicio**	**Total**	**% respecto del total de la muestra del curso**	**% respecto del Dominio del ejercicio**
Numérico	0	0.0	0.0	0	0.0	0.0	2	2.4	20.0	8	7.6	80.0	10	2.7	100.0
Gráfico	2	2.3	7.4	5	5.4	18.5	2	2.4	7.4	18	17.1	66.7	27	7.3	100.0
Algebraico	43	48.9	23.2	52	55.9	28.1	47	56.6	25.4	43	41.0	23.2	185	50.1	100.0
Aplicación	12	13.6	21.4	12	12.9	21.4	14	16.9	25.0	18	17.1	32.1	56	15.2	100.0
No respondio	27	30.7	31.8	23	24.7	27.1	17	20.5	20.0	18	17.1	21.2	85	23.0	100.0
Conjuntista	4	4.5	66.7	1	1.1	16.7	1	1.2	16.7		0.0	0.0	6	1.6	100.0
Total	**88**	**100.0**	**23.8**	**93**	**100.0**	**25.2**	**83**	**100.0**	**22.5**	**105**	**100.0**	**28.5**	**369**	**100.0**	**100.0**

Cuadro No 4. Distribución de resultados por tipo de tarea en ejercicio y curso

	Curso														
	Matemática Básica 1			Matemática Básica 2			Matemática Intermedia 1			Matemática Intermedia 2			Muestra total		
Tipo de tarea en ejercicio	Total	% respecto del total de la muestra del curso	% respecto del Tipo de tarea en ejercicio	Total	% respecto del total de la muestra del curso	% respecto del Tipo de tarea en ejercicio	Total	% respecto del total de la muestra del curso	% respecto del Tipo de tarea en ejercicio	Total	% respecto del total de la muestra del curso	% respecto del Tipo de tarea en ejercicio	Total	% respecto del total de la muestra del curso	% respecto del Tipo de tarea en ejercicio
Graficar	13	14.8	23.6	14	15.1	25.5	7	8.4	12.7	21	20.0	38.2	55	14.9	100.0
Construir tabla	8	9.1	22.9	8	8.6	22.9	14	16.9	40.0	5	4.8	14.3	35	9.5	100.0
Hacer operaciones	0	0.0	0.0	14	15.1	42.4	6	7.2	18.2	13	12.4	39.4	33	8.9	100.0
Resolver ecuaciones	1	1.1	7.1	3	3.2	21.4	6	7.2	42.9	4	3.8	28.6	14	3.8	100.0
Hallar dominio	5	5.7	33.3	3	3.2	20.0	2	2.4	13.3	5	4.8	33.3	15	4.1	100.0
Resolver problemas	13	14.8	26.0	9	9.7	18.0	10	12.0	20.0	18	17.1	36.0	50	13.6	100.0
Construir fórmula	2	2.3	15.4	2	2.2	15.4	5	6.0	38.5	4	3.8	30.8	13	3.5	100.0
Otras	6	6.8	20.0	11	11.8	36.7	2	2.4	6.7	11	10.5	36.7	30	8.1	100.0
No respondió	40	45.5	32.3	29	31.2	23.4	31	37.3	25.0	24	22.9	19.4	124	33.6	100.0
Total	**88**	**100.0**	**23.8**	**93**	**100.0**	**25.2**	**83**	**100.0**	**22.5**	**105**	**100.0**	**28.5**	**369**	**100.0**	**100.0**

Cuadro No 5. Distribución de resultados por tipo de elaboración en ejercicio y curso

	Curso														
	Matemática Básica 1			Matemática Básica 2			Matemática Intermedia 1			Matemática Intermedia 2			Muestra Total		
Tipo de Elaboración	Total	% respecto del total de la muestra del curso	% respecto de la Elabora-ción	Total	% respecto del total de la muestra del curso	% respecto de la Elabora-ción	Total	% respecto del total de la muestra del curso	% respecto de la Elabora-ción	Total	% respecto del total de la muestra del curso	% respecto de la Elabora-ción	Total	% respecto del total de la muestra del curso	% respecto de la Elabora-ción
Personal	80	90.9	23.7	85	91.4	25.2	73	88.0	21.7	99	94.3	29.4	337	91.3	100.0
No personal	0	0.0	0.0	7	7.5	33.3	8	9.6	38.1	6	5.7	28.6	21	5.7	100.0
No respondio	8	9.1	72.7	1	1.1	9.1	2	2.4	18.2	0	0.0	0.0	11	3.0	100.0
Total	**88**	**100.0**	**23.8**	**93**	**100.0**	**25.2**	**83**	**100.0**	**22.5**	**105**	**100.0**	**28.5**	**369**	**100.0**	**100.0**

Cuadro No 6. Distribución de resultados por tipo de concepto en ejercicio y curso

	Curso														
	Matemática Básica 1			Matemática Básica 2			Matemática Intermedia 1			Matemática Intermedia 2			Muestra Total		
Tipo de Concepto	Total	% respecto del total de la muestra del curso	% respecto del concepto	Total	% respecto del total de la muestra del curso	% respecto del concepto	Total	% respecto del total de la muestra del curso	% respecto del concepto	Total	% respecto del total de la muestra del curso	% respecto del concepto	Total	% respecto del total de la muestra del curso	% respecto del concepto
Asociación	46	52.3	24.5	59	63.4	31.4	45	54.2	23.9	38	36.2	20.2	188	50.9	100.0
Transformación	34	38.6	23.6	33	35.5	22.9	29	34.9	20.1	48	45.7	33.3	144	39.0	100.0
No respondió	8	9.1	21.6	1	1.1	2.7	9	10.8	24.3	19	18.1	51.4	37	10.0	100.0
Total	**88**	**100.0**	**23.8**	**93**	**100.0**	**25.2**	**83**	**100.0**	**22.5**	**105**	**100.0**	**28.5**	**369**	**100.0**	**100.0**

Cuadro No 7. Distribución de resultados por tipo de función en el ejemplo y curso.

	Matemática Básica 1			Matemática Básica 2			Matemática Intermedia 1			Matemática Intermedia 2			Muestra total		
Tipo de función en el ejemplo	**Total**	**% respecto del total de la muestra del curso**	**% respecto del Tipo función en ejemplo**	**Total**	**% respecto del total de la muestra del curso**	**% respecto del Tipo función en ejemplo**	**Total**	**% respecto del total de la muestra del curso**	**% respecto del Tipo función en ejemplo**	**Total**	**% respecto del total de la muestra del curso**	**% respecto del Tipo función en ejemplo**	**Total**	**% respecto del total de la muestra del curso**	**% respecto del Tipo función en ejemplo**
Lineal	23	26,1	18,3	29	31,2	23,0	34	41,0	27,0	40	38,1	31,7	126	34,1	100,0
Constante	3	3,4	75,0	1	1,1	25,0	0	0,0	0,0	0	0,0	0,0	4	1,1	100,0
Cuadrática	19	21,6	21,8	29	31,2	33,3	18	21,7	20,7	21	20,0	24,1	87	23,6	100,0
Polinomial	2	2,3	18,2	0	0,0	0,0	3	3,6	27,3	6	5,7	54,5	11	3,0	100,0
Otras	34	38,6	27,0	32	34,4	25,4	23	27,7	18,3	37	35,2	29,4	126	34,1	100,0
No respondió	7	8,0	46,7	2	2,2	13,3	5	6,0	33,3	1	1,0	6,7	15	4,1	100,0
Total	**88**	**100,0**	**23,8**	**93**	**100,0**	**25,2**	**83**	**100,0**	**22,5**	**105**	**100,0**	**28,5**	**369**	**100,0**	**100,0**

Cuadro No 8. Distribución de resultados por tipo de función en el ejercicio y curso.

	Matemática Básica 1			Matemática Básica 2			Matemática Intermedia 1			Matemática Intermedia 2			Muestra total		
Tipo función en ejercicio	**Total**	**% respecto del total de la muestra del curso**	**% respecto del Tipo función en el ejercicio**	**Total**	**% respecto del total de la muestra del curso**	**% respecto del Tipo función en el ejercicio**	**Total**	**% respecto del total de la muestra del curso**	**% respecto del Tipo función en el ejercicio**	**Total**	**% respecto del total de la muestra del curso**	**% respecto del Tipo función en el ejercicio**	**Total**	**% respecto del total de la muestra del curso**	**% respecto del Tipo función en el ejercicio**
Lineal	20	22,7	22,2	23	24,7	25,6	23	27,7	25,6	24	22,9	26,7	90	24,4	100,0
Cuadrática	22	25,0	22,9	28	30,1	29,2	19	22,9	19,8	27	25,7	28,1	96	26,0	100,0
Polinomial	5	5,7	23,8	4	4,3	19,0	4	4,8	19,0	8	7,6	38,1	21	5,7	100,0
Otras	13	14,8	18,8	13	14,0	18,8	17	20,5	24,6	26	24,8	37,7	69	18,7	100,0
No respondió	28	31,8	30,1	25	26,9	26,9	20	24,1	21,5	20	19,0	21,5	93	25,2	100,0
Total	**88**	**100,0**	**23,8**	**93**	**100,0**	**25,2**	**83**	**100,0**	**22,5**	**105**	**100,0**	**28,5**	**369**	**100,0**	**100,0**

Cuadro No 9. Distribución de resultados por tipo de función en el ejercicio y tipo de función en el ejemplo

	Tipo de función en el ejemplo											
	Lineal			Constante			Cuadrática			Polinomial		
Tipo función en ejercicio	Total	% respecto del Tipo de función en el ejemplo	% respecto del Tipo función en el ejercicio	Total	% respecto del Tipo de función en el ejemplo	% respecto del Tipo función en el ejercicio	Total	% respecto del Tipo de función en el ejemplo	% respecto del Tipo función en el ejercicio	Total	% respecto del Tipo de función en el ejemplo	% respecto del Tipo función en el ejercicio
Lineal	41	32,5	45,6	1	25,0	1,1	23	26,4	25,6	1	9,1	1,1
Cuadrática	36	28,6	37,5	1	25,0	1,0	24	27,6	25,0	4	36,4	4,2
Polinomial	6	4,8	28,6	0	0,0	0,0	10	11,5	47,6	1	9,1	4,8
Otras	19	15,1	27,5	1	25,0	1,4	10	11,5	14,5	3	27,3	4,3
No respondió	24	19,0	25,8	1	25,0	1,1	20	23,0	21,5	2	18,2	2,2
Total	**126**	**100,0**	**34,1**	**4**	**100,0**	**1,1**	**87**	**100,0**	**23,6**	**11**	**100,0**	**3,0**

Cuadro No 9. Distribución de resultados por tipo de función en el ejercicio y tipo de función en el ejemplo (continuación)

	Tipo de función en el ejemplo							
			No respondió			Muestra total		
Tipo función en ejercicio	% respecto del Tipo de función en el ejemplo	% respecto del Tipo función en el ejercicio	Total	% respecto del Tipo de función en el ejemplo	% respecto del Tipo función en el ejercicio	Total	% respecto del Tipo de función en el ejemplo	% respecto del Tipo función en el ejercicio
Lineal	18,3	25,6	1	6,7	1,1	90	24,4	100,0
Cuadrática	23,8	31,3	1	6,7	1,0	96	26,0	100,0
Polinomial	3,2	19,0	0	0,0	0,0	21	5,7	100,0
Otras	27,8	50,7	1	6,7	1,4	69	18,7	100,0
No respondió	27,0	36,6	12	80,0	12,9	93	25,2	100,0
Total	**100,0**	**34,1**	**15**	**100,0**	**4,1**	**369**	**100,0**	**100,0**

Cuadro No 10. Distribución de resultados por dominio del ejercicio y dominio del ejemplo

	Dominio del ejemplo														
	Numérico			Gráfico			Algebraico			Aplicación			No respondio		
Dominio del ejercicio	**Total**	**% respecto del Dominio del ejemplo**	**% respecto del Dominio del ejercicio**	**Total**	**% respecto del Dominio del ejemplo**	**% respecto del Dominio del ejercicio**	**Total**	**% respecto del Dominio del ejemplo**	**% respecto del Dominio del ejercicio**	**Total**	**% respecto del Dominio del ejemplo**	**% respecto del Dominio del ejercicio**	**Total**	**% respecto del Dominio del ejemplo**	**% respecto del Dominio del ejercicio**
Numérico	3	14,3	30,0	2	3,4	20,0	1	0,5	10,0	4	5,9	40,0	0	0,0	0,0
Gráfico	0	0,0	0,0	17	28,8	63,0	8	4,3	29,6	2	2,9	7,4	0	0,0	0,0
Algebraico	13	61,9	7,0	22	37,3	11,9	121	65,1	65,4	16	23,5	8,6	1	7,7	0,5
Aplicación	0	0,0	0,0	5	8,5	8,9	17	9,1	30,4	32	47,1	57,1	1	7,7	1,8
No respondio	3	14,3	3,5	13	22,0	15,3	38	20,4	44,7	14	20,6	16,5	11	84,6	12,9
Conjuntista	2	9,5	33,3	0	0,0	0,0	1	0,5	16,7	0	0,0	0,0	0	0,0	0,0
Total	**21**	**100,0**	**5,7**	**59**	**100,0**	**16,0**	**186**	**100,0**	**50,4**	**68**	**100,0**	**18,4**	**13**	**100,0**	**3,5**

Cuadro No 10. Distribución de resultados por dominio del ejercicio y dominio del ejemplo (continuación)

	Dominio del ejemplo					
	Conjuntista			Muestra total		
Dominio del ejercicio	**Total**	**% respecto del Dominio del ejemplo**	**% respecto del Dominio del ejercicio**	**Total**	**% respecto del Dominio del ejemplo**	**% respecto del Dominio del ejercicio**
Numérico	0	0,0	0,0	10	2,7	100,0
Gráfico	0	0,0	0,0	27	7,3	100,0
Algebraico	12	54,5	6,5	185	50,1	100,0
Aplicación	1	4,5	1,8	56	15,2	100,0
No respondio	6	27,3	7,1	85	23,0	100,0
Conjuntista	3	13,6	50,0	6	1,6	100,0
Total	**22**	**100,0**	**6,0**	**369**	**100,0**	**100,0**

Cuadros de resultados de la parte III

Cuadro No. 11 Distribución de resultados por Tipo de Dibujo y Curso

RESPUESTA		CURSO (IDC)				Total
		MB1	MB2	MI1	MI2	
Rectángulo	Frecuencia	20	17	18	28	83
	% entre IDC	22.7%	18.3%	21.7%	26.7%	22.5%
	% del total	5.4%	4.6%	4.9%	7.6%	22.5%
Línea Recta	Frecuencia	5	7	5	5	22
	% entre IDC	5.7%	7.5%	6.0%	4.8%	6.0%
	% del total	1.4%	1.9%	1.4%	1.4%	6.0%
Parábola Correcta	Frecuencia	17	48	33	34	132
	% entre IDC	19.3%	51.6%	39.8%	32.4%	35.8%
	% del total	4.6%	13.0%	8.9%	9.2%	35.8%
Parábola Incorrecta	Frecuencia	8	8	9	10	35
	% entre IDC	9.1%	8.6%	10.8%	9.5%	9.5%
	% del total	2.2%	2.2%	2.4%	2.7%	9.5%
Otras	Frecuencia	7	3	2	12	24
	% entre IDC	8.0%	3.2%	2.4%	11.4%	6.5%
	% del total	1.9%	.8%	.5%	3.3%	6.5%
No respondió	Frecuencia	31	10	16	16	73
	% entre IDC	35.2%	10.8%	19.3%	15.2%	19.8%
	% del total	8.4%	2.7%	4.3%	4.3%	19.8%
Total	Frecuencia	88	93	83	105	369
	% entre IDC	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% del total	23.8%	25.2%	22.5%	28.5%	100.0%

Cuadro No. 12 Contraste de Hipótesis de diferencia de proporciones para la pregunta 1 entre Tipo de Dibujo y Curso de la pregunta 1

		Contraste de hipótesis diferencia de proporciones igual a cero entre respuestas observadas entre cursos para nivel de significación 5% z=+1.96)					
Respuesta		**mb1-mb2**	**mb1-mi1**	**mb1-mi2**	**mb2-mi1**	**mb2-mi2**	**mi1-mi2**
Rectángulo	pest	0.20	0.22	0.24	0.26	0.23	0.24
	sp	0.06	0.06	0.06	0.07	0.06	0.06
	z=	**0.74**	**0.16**	**-0.64**	**-0.52**	**-0.66**	**-0.62**
Conclusión		Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar
Línea Recta	pest	0.07	0.06	0.05	0.07	0.06	0.05
	sp	0.04	0.04	0.03	0.04	0.03	0.03
	z=	**-0.50**	**-0.10**	**0.29**	**0.39**	**0.27**	**0.28**
Conclusión		Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar
Parábola Correcta	pest	0.36	0.29	0.26	0.47	0.41	0.36
	sp	0.07	0.07	0.06	0.08	0.07	0.07
	z=	**-4.53**	**-2.94**	**-2.07**	**1.57**	**-1.86**	**-1.86**
Conclusión		**Rechazar**	**Rechazar**	**Rechazar**	Aceptar	Aceptar	Aceptar
Parábola Incorrecta	pest	0.09	0.10	0.09	0.10	0.09	0.10
	sp	0.04	0.05	0.04	0.05	0.04	0.04
	z=	**0.12**	**-0.38**	**-0.10**	**-0.49**	**-0.11**	**-0.10**
Conclusión		Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar
Otras	pest	0.06	0.05	0.10	0.09	0.08	0.07
	sp	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04
	z=	**1.39**	**1.62**	**-0.82**	**0.19**	**-0.92**	**-0.90**
Conclusión		Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar
No respondio	Pest	0.23	0.27	0.24	0.15	0.13	0.17
	Sp	0.06	0.07	0.06	0.05	0.05	0.06
	z=	**3.93**	**2.33**	**3.25**	**-1.59**	**4.16**	**3.62**
Conclusión		**Rechazar**	**Rechazar**	**Rechazar**	Aceptar	**Rechazar**	**Rechazar**

Cuadro No. 13 Distribución de resultados por Tipo de fórmula de la pregunta 1 y Curso

RESPUESTA Pregunta 1		Curso (IDC) MB1	MB2	MI1	MI2	Total
bh	Frecuencia	5	12	4	10	31
	% entre IDC	5.7%	12.9%	4.8%	9.5%	8.4%
	% del total	1.4%	3.3%	1.1%	2.7%	8.4%
xy	Frecuencia		8	4	5	17
	% entre IDC		8.6%	4.8%	4.8%	4.6%
	% del total		2.2%	1.1%	1.4%	4.6%
x(10-x) (correcta)	Frecuencia	1	8	7	14	**30**
	% entre IDC	1.1%	8.6%	8.4%	13.3%	**8.1%**
	% del total	.3%	2.2%	1.9%	3.8%	**8.1%**
Otras	Frecuencia	27	30	40	41	138
	% entre IDC	30.7%	32.3%	48.2%	39.0%	37.4%
	% del total	7.3%	8.1%	10.8%	11.1%	37.4%
No respondió	Frecuencia	55	35	28	35	153
	% entre IDC	62.5%	37.6%	33.7%	33.3%	41.5%
	% del total	14.9%	9.5%	7.6%	9.5%	41.5%
Total	Frecuencia	88	93	83	105	369
	% entre IDC	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% del total	23.8%	25.2%	22.5%	28.5%	100.0%

Cuadro No. 14 Contraste de Hipótesis de diferencia de proporciones para la pregunta 1 entre Tipo de fórmula y Cursos

		Contraste de hipótesis diferencia de proporciones igual a cero entre respuesas observadas entre cursos para nivel de significación 5% z=+1.96)					
Respuesta		**mb1-mb2**	**mb1-mi1**	**mb1-mi2**	**mb2-mi1**	**mb2-mi2**	**mi1-mi2**
Bh	Pest	0.09	0.05	0.08	0.09	0.11	0.07
	Sp	0.04	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04
	z=	**-1.66**	**0.25**	**-0.99**	**1.86**	**-0.86**	**-1.00**
Conclusión		Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar
Xy	Pest	0.04	0.02	0.03	0.07	0.07	0.05
	Sp	0.03	0.02	0.02	0.04	0.04	0.03
	z=	**-2.81**	**-2.08**	**-2.07**	**0.99**	**-1.35**	**-1.52**
Conclusión		Rechazar	Rechazar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar
x(10-x) [correcta]	Pest	0.05	0.05	0.08	0.09	0.11	0.11
	Sp	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04	0.05
	z=	**-2.31**	**-2.26**	**-3.15**	**0.04**	**-2.73**	**-2.64**
Conclusión		**Rechazar**	**Rechazar**	**Rechazar**	Aceptar	Rechazar	Rechazar
Otras	Pest	0.31	0.39	0.35	0.40	0.36	0.43
	Sp	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07
	z=	**-0.23**	**-2.34**	**-1.21**	**-2.16**	**-1.23**	**-1.15**
Conclusión		Aceptar	Rechazar	Aceptar	Rechazar	Aceptar	Aceptar
No respondio	Pest	0.50	0.49	0.47	0.36	0.35	0.34
	Sp	0.07	0.08	0.07	0.07	0.07	0.07
	z=	**3.34**	**3.76**	**4.05**	**0.54**	**4.28**	**4.21**
Conclusión		**Rechazar**	**Rechazar**	**Rechazar**	Aceptar	**Rechazar**	**Rechazar**

Cuadro No. 15 Distribución de resultados por Tipo de relación de la pregunta 1 y Curso

RESPUESTA		Curso (IDC)				Total
		MB1	MB2	MI1	MI2	
Correcta	Frecuencia	35	60	43	56	194
	% entre IDC	39.8%	64.5%	51.8%	53.3%	52.6%
	% del total	9.5%	16.3%	11.7%	15.2%	52.6%
Incorrecta	Frecuencia	3	4	3	5	15
	% entre IDC	3.4%	4.3%	3.6%	4.8%	4.1%
	% del total	.8%	1.1%	.8%	1.4%	4.1%
No respondió	Frecuencia	50	29	37	44	160
	% entre IDC	56.8%	31.2%	44.6%	41.9%	43.4%
	% del total	13.6%	7.9%	10.0%	11.9%	43.4%
Total	Frecuencia	88	93	83	105	369
	% entre IDC	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% del total	23.8%	25.2%	22.5%	28.5%	100.0%

Cuadro No. 16 Distribución de resultados por Tipo de argumentación de la pregunta 1 y Curso

RESPUESTA		Curso (IDC) MB1	MB2	MI1	MI2	Total
Aplicación	Frecuencia		1		1	2
	% entre IDC		1.1%		1.0%	.5%
	% del total		.3%		.3%	.5%
Expresión Algebraica	Frecuencia	2	12	7	5	26
	% entre IDC	2.3%	12.9%	8.4%	4.8%	7.0%
	% del total	.5%	3.3%	1.9%	1.4%	7.0%
Rep. Gráfica	Frecuencia	5	2	8	3	18
	% entre IDC	5.7%	2.2%	9.6%	2.9%	4.9%
	% del total	1.4%	.5%	2.2%	.8%	4.9%
Dominio Imagen	Frecuencia	13	14	3	3	33
	% entre IDC	14.8%	15.1%	3.6%	2.9%	8.9%
	% del total	3.5%	3.8%	.8%	.8%	8.9%
Variación Constancia	Frecuencia	3	17	13	27	60
	% entre IDC	3.4%	18.3%	15.7%	25.7%	16.3%
	% del total	.8%	4.6%	3.5%	7.3%	16.3%
Ecuación	Frecuencia			1		1
	% entre IDC			1.2%		.3%
	% del total			.3%		.3%
Ideograma	Frecuencia		6	4		10
	% entre IDC		6.5%	4.8%		2.7%
	% del total		1.6%	1.1%		2.7%
Número Imagen	Frecuencia				2	2
	% entre IDC				1.9%	.5%
	% del total				.5%	.5%
Crec/Decrecimiento	Frecuencia	6	4	4	5	19
	% entre IDC	6.8%	4.3%	4.8%	4.8%	5.1%
	% del total	1.6%	1.1%	1.1%	1.4%	5.1%
Resolución Problemas	Frecuencia		1	2	7	10
	% entre IDC		1.1%	2.4%	6.7%	2.7%
	% del total		.3%	.5%	1.9%	2.7%
Otras	Frecuencia	5	6	1	3	15
	% entre IDC	5.7%	6.5%	1.2%	2.9%	4.1%
	% del total	1.4%	1.6%	.3%	.8%	4.1%
No respondió	Frecuencia	54	30	40	49	173
	% entre IDC	61.4%	32.3%	48.2%	46.7%	46.9%
	% del total	14.6%	8.1%	10.8%	13.3%	46.9%
TOTAL	Frecuencia	88	93	83	105	369
	% entre IDC	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% del total	23.8%	25.2%	22.5%	28.5%	100.0%

Cuadro No. 17 Contraste de Hipótesis de diferencia de proporciones para la pregunta entre Tipo de relación y Cursos

		Contraste de hipótesis diferencia de proporciones igual a cero entre respuesas observadas entre cursos para nivel de significación 5% z=+1.96)					
Respuesta		**mb1-mb2**	**mb1-mi1**	**mb1-mi2**	**mb2-mi1**	**mb2-mi2**	**mi1-mi2**
Correcta	Pest	0.52	0.46	0.47	0.59	0.59	0.53
	Sp	0.07	0.08	0.07	0.07	0.07	0.07
	z=	**-3.33**	**-1.58**	**-1.88**	**1.71**	**-1.93**	**-1.85**
Conclusión		Rechazar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar
Incorrecta	Pest	0.04	0.04	0.04	0.04	0.05	0.04
	Sp	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
	z=	**-0.31**	**-0.07**	**-0.47**	**0.23**	**-0.46**	**-0.46**
Conclusión		Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar
No respondio	Pest	0.44	0.51	0.49	0.38	0.37	0.43
	sp	0.07	0.08	0.07	0.07	0.07	0.07
	z=	**3.48**	**1.60**	**2.06**	**-1.83**	**2.17**	**2.05**
Conclusión		**Rechazar**	**Rechazar**	**Rechazar**	Aceptar	**Rechazar**	**Rechazar**

Cuadro No. 18 Contraste de Hipótesis de diferencia de proporciones para la pregunta 1 entre Tipo de argumentación y cursos

		Contraste de hipótesis diferencia de proporciones igual a cero entre respuesas observadas entre cursos para nivel de significación 5% z=+1.96)					
Respuesta		**mb1-mb2**	**mb1-mi1**	**mb1-mi2**	**mb2-mi1**	**mb2-mi2**	**mi1-mi2**
Exp. Algebraica	pest	0.08	0.05	0.04	0.10	0.09	0.06
	sp	0.04	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04
	z=	**-2.68**	**-1.80**	**-0.93**	**1.00**	**-0.62**	**-0.69**
Conclusión		Rechazar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar
Dominio Imagen	pest	0.15	0.09	0.08	0.10	0.09	0.03
	sp	0.05	0.04	0.04	0.04	0.04	0.03
	z=	**-0.05**	**2.50**	**3.03**	**2.56**	**2.99**	**4.62**
Conclusión		Aceptar	Rechazar	Rechazar	Rechazar	Rechazar	Rechazar
Variación Constancia	pest	0.11	0.09	0.15	0.25	0.22	0.21
	sp	0.05	0.04	0.05	0.07	0.06	0.06
	z=	**-3.19**	**-2.75**	**-4.30**	**0.40**	**-3.77**	**-3.71**
Conclusión		**Rechazar**	**Rechazar**	**Rechazar**	Aceptar	Rechazar	Rechazar
No respondio	pest	0.46	0.55	0.53	0.40	0.40	0.47
	sp	0.07	0.08	0.07	0.07	0.07	0.07
	z=	**3.92**	**1.73**	**2.04**	**-2.16**	**2.11**	**2.00**
Conclusión		**Rechazar**	**Aceptar**	**Rechazar**	Rechazar	**Rechazar**	**Rechazar**

Cuadro No. 19 Distribución de resultados por Tipo de opinión para la pregunta 2 y Curso

RESPUESTA		Curso (IDC)				Total
		MB1	MB2	MI1	MI2	
Correcta	Frecuencia	44	65	57	66	232
	% entre IDC	50.0%	69.9%	68.7%	62.9%	62.9%
	% del total	11.9%	17.6%	15.4%	17.9%	62.9%
Incorrecta	Frecuencia	10	8	11	5	34
	% entre IDC	11.4%	8.6%	13.3%	4.8%	9.2%
	% del total	2.7%	2.2%	3.0%	1.4%	9.2%
No respondió	Frecuencia	34	20	15	34	103
	% entre IDC	38.6%	21.5%	18.1%	32.4%	27.9%
	% del total	9.2%	5.4%	4.1%	9.2%	27.9%
Total	Frecuencia	88	93	83	105	369
	% entre IDC	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% del total	23.8%	25.2%	22.5%	28.5%	100.0%

Cuadro No. 20 Distribución de resultados por Tipo de argumentación para la pregunta 2 y Curso

RESPUESTA		Curso (IDC) MB1	MB2	MI1	MI2	Total
Aplicación	Frecuencia	3	9	1	5	18
	% entre IDC	3.4%	9.7%	1.2%	4.8%	4.9%
	% del total	.8%	2.4%	.3%	1.4%	4.9%
Expresión Algebraica	Frecuencia	7	33	18	23	81
	% entre IDC	8.0%	35.5%	21.7%	21.9%	22.0%
	% del total	1.9%	8.9%	4.9%	6.2%	22.0%
Rep. Gráfica	Frecuencia	1	2	2	2	7
	% entre IDC	1.1%	2.2%	2.4%	1.9%	1.9%
	% del total	.3%	.5%	.5%	.5%	1.9%
Dominio Imagen	Frecuencia	21	13	5		39
	% entre IDC	23.9%	14.0%	6.0%		10.6%
	% del total	5.7%	3.5%	1.4%		10.6%
Variación Constancia	Frecuencia	4	7	17	14	42
	% entre IDC	4.5%	7.5%	20.5%	13.3%	11.4%
	% del total	1.1%	1.9%	4.6%	3.8%	11.4%
Ecuación	Frecuencia	1	2	6	1	10
	% entre IDC	1.1%	2.2%	7.2%	1.0%	2.7%
	% del total	.3%	.5%	1.6%	.3%	2.7%
Ideograma	Frecuencia				1	1
	% entre IDC				1.0%	.3%
	% del total				.3%	.3%
Número Imagen	Frecuencia			1	1	2
	% entre IDC			1.2%	1.0%	.5%
	% del total			.3%	.3%	.5%
Crec/Decrecimiento	Frecuencia			1		1
	% entre IDC			1.2%		.3%
	% del total			.3%		.3%
Continuidad Discontinuidad	Frecuencia		1	1	1	3
	% entre IDC		1.1%	1.2%	1.0%	.8%
	% del total		.3%	.3%	.3%	.8%
Resolución Problemas	Frecuencia			6	16	22
	% entre IDC			7.2%	15.2%	6.0%
	% del total			1.6%	4.3%	6.0%
Otras	Frecuencia	11	6	3	3	23
	% entre IDC	12.5%	6.5%	3.6%	2.9%	6.2%
	% del total	3.0%	1.6%	.8%	.8%	6.2%
No respondió	Frecuencia	40	20	22	38	120
	% entre IDC	45.5%	21.5%	26.5%	36.2%	32.5%
	% del total	10.8%	5.4%	6.0%	10.3%	32.5%
TOTAL	Frecuencia	88	93	83	105	369
	% entre IDC	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% del total	23.8%	25.2%	22.5%	28.5%	100.0%

Cuadro No. 21 Contraste de Hipótesis de diferencia de proporciones de la pregunta 2 entre Tipo de opinión y cursos

		Contraste de hipótesis diferencia de proporciones igual a cero entre respuestas observadas entre cursos para nivel de significación 5% z=+1.96)					
Respuesta		**mb1-mb2**	**mb1-mi1**	**mb1-mi2**	**mb2-mi1**	**mb2-mi2**	**mi1-mi2**
Correcta	pest	0.60	0.59	0.57	0.69	0.66	0.65
	sp	0.07	0.08	0.07	0.07	0.07	0.07
	z=	**-2.73**	**-2.48**	**-1.80**	**0.17**	**-1.91**	**-1.84**
Conclusión		Rechazar	Rechazar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar
Incorrecta	pest	0.10	0.12	0.08	0.07	0.07	0.09
	sp	0.04	0.05	0.04	0.04	0.04	0.04
	z=	**0.62**	**-0.38**	**1.73**	**-1.18**	**1.87**	**1.61**
Conclusión		Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar
No respondio	pest	0.30	0.29	0.35	0.20	0.27	0.26
	sp	0.07	0.07	0.07	0.06	0.06	0.06
	z=	**2.52**	**2.97**	**0.91**	**0.57**	**0.99**	**0.97**
Conclusión		**Rechazar**	**Rechazar**	**Aceptar**	Aceptar	**Aceptar**	**Aceptar**

Cuadro No. 22 Contraste de Hipótesis de diferencia de proporciones par la pregunta 2 entre Tipo de argumentación y cursos

		Contraste de hipótesis diferencia de proporciones igual a cero entre respuesas observadas entre cursos para nivel de significación 5% z=+1.96)					
Respuesta		**mb1-mb2**	**mb1-mi1**	**mb1-mi2**	**mb2-mi1**	**mb2-mi2**	**mi1-mi2**
Exp. Algebraica	pest	0.22	0.15	0.15	0.32	0.28	0.22
	Sp	0.06	0.05	0.05	0.07	0.06	0.06
	z=	**-4.46**	**-2.54**	**-2.69**	**1.96**	**-2.18**	**-2.30**
Conclusión		Rechazar	Rechazar	Rechazar	Aceptar	Rechazar	Rechazar
Dominio Imagen	pest	0.19	0.15	0.11	0.07	0.07	0.03
	Sp	0.06	0.05	0.04	0.04	0.04	0.02
	z=	**1.70**	**3.25**	**5.36**	**2.01**	**6.77**	**10.10**
Conclusión		Aceptar	Rechazar	Rechazar	Rechazar	Rechazar	Rechazar
Variación Constancia	pest	0.06	0.12	0.09	0.12	0.11	0.16
	Sp	0.04	0.05	0.04	0.05	0.04	0.05
	z=	**-0.84**	**-3.17**	**-2.12**	**-2.65**	**-2.00**	**-1.61**
Conclusión		**Aceptar**	**Rechazar**	**Rechazar**	Rechazar	Rechazar	Aceptar
No respondio	Pest	0.33	0.36	0.39	0.33	0.29	0.32
	Sp	0.07	0.07	0.07	0.07	0.06	0.07
	z=	**3.42**	**2.58**	**1.31**	**-0.70**	**1.43**	**1.35**
Conclusión		**Rechazar**	**Rechazar**	**Rechazar**	Aceptar	**Aceptar**	**Aceptar**

Cuadro No. 23 Distribución de resultados por Tipo de gráfica para la pregunta 2 y Curso

RESPUESTA		Curso (IDC) MB1	MB2	MI1	MI2	Total
Por partes Correcta	Frecuencia	9	33	17	27	86
	% entre IDC	10.2%	35.5%	20.5%	25.7%	23.3%
	% del total	2.4%	8.9%	4.6%	7.3%	23.3%
Por partes Incorrecta	Frecuencia	10	10	10	8	38
	% entre IDC	11.4%	10.8%	12.0%	7.6%	10.3%
	% del total	2.7%	2.7%	2.7%	2.2%	10.3%
Gráfica de línea	Frecuencia	19	17	15	27	78
	% entre IDC	21.6%	18.3%	18.1%	25.7%	21.1%
	% del total	5.1%	4.6%	4.1%	7.3%	21.1%
Otras	Frecuencia	5	3	3	7	18
	% entre IDC	5.7%	3.2%	3.6%	6.7%	4.9%
	% del total	1.4%	.8%	.8%	1.9%	4.9%
No respondió	Frecuencia	45	30	38	36	149
	% entre IDC	51.1%	32.3%	45.8%	34.3%	40.4%
	% del total	12.2%	8.1%	10.3%	9.8%	40.4%
Total	Frecuencia	88	93	83	105	369
	% entre IDC	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% del total	23.8%	25.2%	22.5%	28.5%	100.0%

Cuadro No. 24 Contraste de Hipótesis de diferencia de proporciones par la pregunta 2 entre Tipo de gráfica y cursos

		Contraste de hipótesis diferencia de proporciones igual a cero entre respuestas observadas entre cursos para nivel de significación 5% z=±1.96)					
Respuesta		**mb1-mb2**	**mb1-mi1**	**mb1-mi2**	**mb2-mi1**	**mb2-mi2**	**mi1-mi2**
P partes correcta	Pest	0.23	0.15	0.18	0.34	0.30	0.23
	Sp	0.06	0.05	0.06	0.07	0.07	0.06
	z=	**-4.02**	**-1.87**	**-2.78**	**2.10**	**-2.37**	**-2.49**
Conclusión		Rechazar	Aceptar	Rechazar	Rechazar	Rechazar	Rechazar
P partes incorrecta	Pest	0.11	0.12	0.09	0.10	0.09	0.10
	Sp	0.05	0.05	0.04	0.05	0.04	0.04
	z=	**0.13**	**-0.14**	**0.90**	**-0.28**	**0.91**	**0.87**
Conclusión		Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar
Lineal	Pest	0.20	0.20	0.23	0.25	0.22	0.22
	Sp	0.06	0.06	0.06	0.07	0.06	0.06
	z=	**0.56**	**0.58**	**-0.68**	**0.03**	**-0.70**	**-0.67**
Conclusión		**Aceptar**	**Aceptar**	**Aceptar**	Aceptar	Aceptar	Aceptar
Otras	Pest	0.41	0.49	0.41	0.38	0.33	0.39
	Sp	0.07	0.08	0.07	0.07	0.07	0.07
	z=	**2.58**	**0.70**	**2.37**	**-1.85**	**2.51**	**2.35**
Conclusión		Rechazar	Aceptar	Rechazar	Aceptar	Rechazar	Rechazar
No respondio	Pest	0.50	0.49	0.45	0.40	0.35	0.34
	Sp	0.07	0.08	0.07	0.07	0.07	0.07
	z=	**3.34**	**3.76**	**4.05**	**0.53**	**4.28**	**4.21**
Conclusión		**Rechazar**	**Rechazar**	**Rechazar**	Aceptar	**Rechazar**	**Rechazar**

Cuadro No. 25 Distribución de resultados por Tipo de estrategia para la pregunta 2 y Curso

RESPUESTA		Curso (IDC)				Total
		MB1	MB2	MI1	MI2	
Construye gráfica	Frecuencia	40	61	36	25	162
	% entre IDC	45.5%	65.6%	43.4%	23.8%	43.9%
	% del total	10.8%	16.5%	9.8%	6.8%	43.9%
Realiza cálculos	Frecuencia		1	4	3	8
	% entre IDC		1.1%	4.8%	2.9%	2.2%
	% del total		.3%	1.1%	.8%	2.2%
Dibuja esquema	Frecuencia	2	1	1	1	5
	% entre IDC	2.3%	1.1%	1.2%	1.0%	1.4%
	% del total	.5%	.3%	.3%	.3%	1.4%
No respondió	Frecuencia	46	30	42	76	194
	% entre IDC	52.3%	32.3%	50.6%	72.4%	52.6%
	% del total	12.5%	8.1%	11.4%	20.6%	52.6%
Total	Frecuencia	88	93	83	105	369
	% entre IDC	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% del total	23.8%	25.2%	22.5%	28.5%	100.0%

Cuadro No. 26 Distribución de resultados por Tipo de formula para la pregunta 2 y Curso

RESPUESTA		Curso (IDC)				Total
		MB1	MB2	MI1	MI2	
Correcta	Frecuencia			1	5	6
	% entre IDC			1.2%	4.8%	1.6%
	% del total			.3%	1.4%	1.6%
Incorrecta	Frecuencia	21	41	28	37	127
	% entre IDC	23.9%	44.1%	33.7%	35.2%	34.4%
	% del total	5.7%	11.1%	7.6%	10.0%	34.4%
No respondió	Frecuencia	67	52	54	63	236
	% entre IDC	76.1%	55.9%	65.1%	60.0%	64.0%
	% del total	18.2%	14.1%	14.6%	17.1%	64.0%
Total	Frecuencia	88	93	83	105	369
	% entre IDC	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% del total	23.8%	25.2%	22.5%	28.5%	100.0%

Cuadro No. 27 Contraste de Hipótesis de diferencia de proporciones par la pregunta 2 entre Tipo de estrategia y cursos

		Contraste de hipótesis diferencia de proporciones igual a cero entre respuesas observadas entre cursos para nivel de significación 5% z=+1.96)					
Respuesta		**Mb1-mb2**	**mb1-mi1**	**mb1-mi2**	**mb2-mi1**	**mb2-mi2**	**mi1-mi2**
Cons Gráfica	pest	0.56	0.44	0.34	0.55	0.43	0.32
	sp	0.07	0.08	0.07	0.08	0.07	0.07
	z=	**-2.73**	**0.27**	**3.17**	**2.96**	**3.07**	**3.15**
Conclusión		Rechazar	Aceptar	Rechazar	Rechazar	Rechazar	Rechazar
Hace cálculos	pest	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	0.04
	sp	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	0.03
	z=	**-0.98**	**-2.08**	**-1.62**	**-1.66**	**-1.43**	**-1.03**
Conclusión		Aceptar	Rechazar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar
Dib Esquema	pest	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01
	sp	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01	0.02
	z=	**0.63**	**0.53**	**0.75**	**-0.08**	**0.93**	**0.88**
Conclusión		**Aceptar**	**Aceptar**	**Aceptar**	Aceptar	Aceptar	Aceptar
No respondio	pest	0.42	0.51	0.63	0.41	0.54	0.63
	sp	0.07	0.08	0.07	0.07	0.07	0.07
	z=	**2.73**	**0.22**	**-2.89**	**-2.47**	**-2.83**	**-2.83**
Conclusión		**Rechazar**	**Aceptar**	**Rechazar**	Rechazar	**Rechazar**	**Rechazar**

Cuadro No. 28 Distribución de resultados por Tipo de respuesta incorrecta para la pregunta 2 y Curso

RESPUESTA		CURSO (IDC)				Total
		MB1	MB2	MI1	MI2	
Por partes	Frecuencia	1	15	8	7	31
	% entre IDC	1.1%	16.1%	9.6%	6.7%	8.4%
	% del total	.3%	4.1%	2.2%	1.9%	8.4%
Lineal	Frecuencia	12	21	19	23	75
	% entre IDC	13.6%	22.6%	22.9%	21.9%	20.3%
	% del total	3.3%	5.7%	5.1%	6.2%	20.3%
Constante	Frecuencia	1	3		1	5
	% entre IDC	1.1%	3.2%		1.0%	1.4%
	% del total	.3%	.8%		.3%	1.4%
Cuadrática	Frecuencia	1		2		3
	% entre IDC	1.1%		2.4%		.8%
	% del total	.3%		.5%		.8%
Otras	Frecuencia	6	2		4	12
	% entre IDC	6.8%	2.2%		3.8%	3.3%
	% del total	1.6%	.5%		1.1%	3.3%
No respondió/correcta	Frecuencia	67	52	54	70	243
	% entre IDC	76.1%	55.9%	65.1%	66.7%	65.9%
	% del total	18.2%	14.1%	14.6%	19.0%	65.9%
Total	Frecuencia	88	93	83	105	369
	% entre IDC	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% del total	23.8%	25.2%	22.5%	28.5%	100.0%

Cuadro No. 29 Distribución de resultados por Tipo de relación para la pregunta 3 y Curso

RESPUESTA		Curso (IDC)				Total
		MB1	MB2	MI1	MI2	
Correcta	Frecuencia	4	14	26	31	75
	% entre IDC	4.5%	15.1%	31.3%	29.5%	20.3%
	% del total	1.1%	3.8%	7.0%	8.4%	20.3%
Incorrecta	Frecuencia	22	37	17	24	100
	% entre IDC	25.0%	39.8%	20.5%	22.9%	27.1%
	% del total	6.0%	10.0%	4.6%	6.5%	27.1%
No respondió	Frecuencia	62	42	40	50	194
	% entre IDC	70.5%	45.2%	48.2%	47.6%	52.6%
	% del total	16.8%	11.4%	10.8%	13.6%	52.6%
Total	Frecuencia	88	93	83	105	369
	% entre IDC	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% del total	23.8%	25.2%	22.5%	28.5%	100.0%

Cuadro No. 30 Contraste de Hipótesis de diferencia de proporciones par la pregunta 3 entre Tipo de relación y cursos

		Contraste de hipótesis diferencia de proporciones igual a cero entre respuestas observadas entre cursos para nivel de significación 5% z=±1.96)					
Respuesta		**mb1-mb2**	**mb1-mi1**	**mb1-mi2**	**mb2-mi1**	**mb2-mi2**	**mi1-mi2**
Correcta	pest	0.10	0.18	0.18	0.23	0.23	0.30
	sp	0.04	0.06	0.06	0.06	0.06	0.07
	z=	**-2.36**	**-4.60**	**-4.49**	**-2.57**	**-4.19**	**-3.70**
Conclusión		Rechazar	Rechazar	Rechazar	Rechazar	Rechazar	Rechazar
Incorrecta	pest	0.33	0.23	0.23	0.35	0.31	0.22
	sp	0.07	0.06	0.06	0.07	0.07	0.06
	z=	**-2.12**	**0.70**	**0.35**	**2.69**	**0.33**	**0.35**
Conclusión		Rechazar	Aceptar	Aceptar	Rechazar	Aceptar	Aceptar
No respondio	pest	0.57	0.60	0.58	0.47	0.46	0.48
	sp	0.07	0.08	0.07	0.08	0.07	0.07
	z=	**3.44**	**2.97**	**3.20**	**-0.40**	**3.22**	**3.11**
Conclusión		**Rechazar**	**Rechazar**	**Rechazar**	Aceptar	**Rechazar**	**Rechazar**

Cuadro No. 31 Distribución de resultados por Tipo de identificación para la pregunta 3 y Curso

RESPUESTA		Curso (IDC)				Total
		MB1	MB2	MI1	MI2	
Correcta	Frecuencia	27	44	38	42	151
	% entre IDC	30.7%	47.3%	45.8%	40.0%	40.9%
	% del total	7.3%	11.9%	10.3%	11.4%	40.9%
Incorrecta	Frecuencia	4	5	7	7	23
	% entre IDC	4.5%	5.4%	8.4%	6.7%	6.2%
	% del total	1.1%	1.4%	1.9%	1.9%	6.2%
No respondió	Frecuencia	57	44	38	56	195
	% entre IDC	64.8%	47.3%	45.8%	53.3%	52.8%
	% del total	15.4%	11.9%	10.3%	15.2%	52.8%
Total	Frecuencia	88	93	83	105	369
	% entre IDC	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% del total	23.8%	25.2%	22.5%	28.5%	100.0%

Cuadro No. 32 Distribución de resultados por Tipo de argumentación para la pregunta 3 y Curso

RESPUESTA		Curso (IDC) MB1	MB2	MI1	MI2	Total
Aplicación	Frecuencia	2			1	3
	% entre IDC	2.3%			1.0%	.8%
	% del total	.5%			.3%	.8%
Expresión Algebraica	Frecuencia	9	15	17	3	44
	% entre IDC	10.2%	16.1%	20.5%	2.9%	11.9%
	% del total	2.4%	4.1%	4.6%	.8%	11.9%
Rep. Gráfica	Frecuencia			1	2	3
	% entre IDC			1.2%	1.9%	.8%
	% del total			.3%	.5%	.8%
Dominio Imagen	Frecuencia	12	30	3	4	49
	% entre IDC	13.6%	32.3%	3.6%	3.8%	13.3%
	% del total	3.3%	8.1%	.8%	1.1%	13.3%
Variación Constancia	Frecuencia	2		7	22	31
	% entre IDC	2.3%		8.4%	21.0%	8.4%
	% del total	.5%		1.9%	6.0%	8.4%
Ecuación	Frecuencia	1		5	1	7
	% entre IDC	1.1%		6.0%	1.0%	1.9%
	% del total	.3%		1.4%	.3%	1.9%
Número Imagen	Frecuencia			2	2	4
	% entre IDC			2.4%	1.9%	1.1%
	% del total			.5%	.5%	1.1%
Continuidad Discontinuidad	Frecuencia				2	2
	% entre IDC				1.9%	.5%
	% del total				.5%	.5%
Resolución Problemas	Frecuencia			3	4	7
	% entre IDC			3.6%	3.8%	1.9%
	% del total			.8%	1.1%	1.9%
Otras	Frecuencia	3	8	2	3	16
	% entre IDC	3.4%	8.6%	2.4%	2.9%	4.3%
	% del total	.8%	2.2%	.5%	.8%	4.3%
No respondió	Frecuencia	59	40	43	61	203
	% entre IDC	67.0%	43.0%	51.8%	58.1%	55.0%
	% del total	16.0%	10.8%	11.7%	16.5%	55.0%
TOTAL	Frecuencia	88	93	83	105	369
	% entre IDC	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% del total	23.8%	25.2%	22.5%	28.5%	100.0%

Cuadro No. 33 Contraste de Hipótesis de diferencia de proporciones par la pregunta 3 entre Tipo de identificación y cursos

		Contraste de hipótesis diferencia de proporciones igual a cero entre respuestas observadas entre cursos para nivel de significación 5% z=±1.96)					
Respuesta		**mb1-mb2**	**mb1-mi1**	**mb1-mi2**	**mb2-mi1**	**mb2-mi2**	**mi1-mi2**
Correcta	pest	0.39	0.38	0.36	0.47	0.43	0.43
	sp	0.07	0.07	0.07	0.08	0.07	0.07
	z=	**-2.29**	**-2.03**	**-1.35**	**0.20**	**-1.32**	**-1.28**
Conclusión		Rechazar	Rechazar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar
Incorrecta	pest	0.05	0.06	0.06	0.07	0.06	0.07
	sp	0.03	0.04	0.03	0.04	0.03	0.04
	z=	**-0.26**	**-1.04**	**-0.63**	**-0.80**	**-0.62**	**-0.55**
Conclusión		Rechazar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar
No respondio	pest	0.56	0.56	0.59	0.47	0.51	0.50
	sp	0.07	0.08	0.07	0.08	0.07	0.07
	z=	**2.36**	**2.50**	**1.61**	**0.20**	**1.61**	**1.56**
Conclusión		**Rechazar**	**Rechazar**	**Aceptar**	Aceptar	**Aceptar**	**Aceptar**

Cuadro No. 34 Contraste de Hipótesis de diferencia de proporciones par la pregunta 3 entre Tipo de argumentación y cursos

		Contraste de hipótesis diferencia de proporciones igual a cero entre respuestas observadas entre cursos para nivel de significación 5% z=±1.96)					
Respuesta		**mb1-mb2**	**mb1-mi1**	**mb1-mi2**	**mb2-mi1**	**mb2-mi2**	**mi1-mi2**
Exp. Algebraica	pest	0.13	0.15	0.06	0.18	0.09	0.11
	sp	0.05	0.05	0.03	0.06	0.04	0.05
	z=	**-1.17**	**-1.87**	**2.11**	**-0.75**	**1.80**	**1.63**
Conclusión		Aceptar	Aceptar	Rechazar	Aceptar	Aceptar	Aceptar
Dominio Imagen	pest	0.23	0.09	0.08	0.19	0.17	0.04
	sp	0.06	0.04	0.04	0.06	0.05	0.03
	z=	**-2.97**	**2.32**	**2.49**	**4.80**	**1.83**	**3.53**
Conclusión		Rechazar	Rechazar	Rechazar	Rechazar	Aceptar	Rechazar
Variación Constancia	pest	0.01	0.05	0.12	0.13	0.11	0.15
	sp	0.02	0.03	0.05	0.05	0.04	0.05
	z=	**1.46**	**-1.80**	**-3.96**	**-1.69**	**-4.17**	**-3.52**
Conclusión		**Aceptar**	**Aceptar**	**Rechazar**	Aceptar	Rechazar	Rechazar
No respondio	pest	0.55	0.60	0.62	0.47	0.51	0.55
	sp	0.07	0.08	0.07	0.08	0.07	0.07
	z=	**3.25**	**2.03**	**1.28**	**-1.17**	**1.26**	**1.23**
Conclusión		**Rechazar**	**Rechazar**	**Aceptar**	Aceptar	**Aceptar**	**Aceptar**

Cuadro No. 35 Distribución de resultados por Tipo de identificación para la pregunta 4A y Curso

RESPUESTA		Curso (IDC)				Total
		MB1	MB2	MI1	MI2	
Correcta	Frecuencia	21	32	29	40	122
	% entre IDC	23.9%	34.4%	34.9%	38.1%	33.1%
	% del total	5.7%	8.7%	7.9%	10.8%	33.1%
Incorrecta	Frecuencia	35	49	32	38	154
	% entre IDC	39.8%	52.7%	38.6%	36.2%	41.7%
	% del total	9.5%	13.3%	8.7%	10.3%	41.7%
No respondió	Frecuencia	32	12	22	27	93
	% entre IDC	36.4%	12.9%	26.5%	25.7%	25.2%
	% del total	8.7%	3.3%	6.0%	7.3%	25.2%
Total	Frecuencia	88	93	83	105	369
	% entre IDC	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% del total	23.8%	25.2%	22.5%	28.5%	100.0%

Cuadro No. 36 Distribución de resultados por Tipo de argumentación para la pregunta 4A y Curso

RESPUESTA		Curso (IDC)				Total
		MB1	MB2	MI1	MI2	
Aplicación	Frecuencia	15	34	19	14	82
	% entre IDC	17.0%	36.6%	22.9%	13.3%	22.2%
	% del total	4.1%	9.2%	5.1%	3.8%	22.2%
Expresión Algebraica	Frecuencia	1	4	4	3	12
	% entre IDC	1.1%	4.3%	4.8%	2.9%	3.3%
	% del total	.3%	1.1%	1.1%	.8%	3.3%
Rep. Gráfica	Frecuencia			1	1	2
	% entre IDC			1.2%	1.0%	.5%
	% del total			.3%	.3%	.5%
Dominio Imagen	Frecuencia	2	4	19	14	39
	% entre IDC	2.3%	4.3%	22.9%	13.3%	10.6%
	% del total	.5%	1.1%	5.1%	3.8%	10.6%
Variación Constancia	Frecuencia	2	8	2	17	29
	% entre IDC	2.3%	8.6%	2.4%	16.2%	7.9%
	% del total	.5%	2.2%	.5%	4.6%	7.9%
Ideograma	Frecuencia				1	1
	% entre IDC				1.0%	.3%
	% del total				.3%	.3%
Número Imagen	Frecuencia			3	7	10
	% entre IDC			3.6%	6.7%	2.7%
	% del total			.8%	1.9%	2.7%
Resolución Problemas	Frecuencia		1		1	2
	% entre IDC		1.1%		1.0%	.5%
	% del total		.3%		.3%	.5%
Otras	Frecuencia	15	13	2	2	32
	% entre IDC	17.0%	14.0%	2.4%	1.9%	8.7%
	% del total	4.1%	3.5%	.5%	.5%	8.7%
No respondió	Frecuencia	53	29	33	45	160
	% entre IDC	60.2%	31.2%	39.8%	42.9%	43.4%
	% del total	14.4%	7.9%	8.9%	12.2%	43.4%
TOTAL	Frecuencia	88	93	83	105	369
	% entre IDC	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% del total	23.8%	25.2%	22.5%	28.5%	100.0%

Cuadro No. 37 Contraste de Hipótesis de diferencia de proporciones par la pregunta 4A entre Tipo de identificación y cursos

		Contraste de hipótesis diferencia de proporciones igual a cero entre respuestas observadas entre cursos para nivel de significación 5% z=±1.96)					
Respuesta		**mb1-mb2**	**mb1-mi1**	**mb1-mi2**	**mb2-mi1**	**mb2-mi2**	**mi1-mi2**
Correcta	pest	0.29	0.29	0.31	0.41	0.36	0.37
	sp	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07
	z=	**-1.56**	**-1.59**	**-2.13**	**-0.07**	**-2.08**	**-2.01**
Conclusión		Aceptar	Aceptar	Rechazar	Aceptar	Rechazar	Rechazar
Incorrecta	pest	0.46	0.39	0.37	0.49	0.44	0.37
	sp	0.07	0.07	0.07	0.08	0.07	0.07
	z=	**-1.74**	**0.16**	**0.51**	**1.87**	**0.51**	**0.50**
Conclusión		Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar
No respondio	pest	0.24	0.32	0.30	0.22	0.20	0.26
	sp	0.06	0.07	0.07	0.06	0.06	0.06
	z=	**3.68**	**1.39**	**1.61**	**-2.17**	**1.88**	**1.65**
Conclusión		**Rechazar**	**Aceptar**	**Aceptar**	Rechazar	**Aceptar**	**Aceptar**

Cuadro No. 38 Contraste de Hipótesis de diferencia de proporciones par la pregunta 4A entre Tipo de argumentación y cursos

		Contraste de hipótesis diferencia de proporciones igual a cero entre respuestas observadas entre cursos para nivel de significación 5% z=±1.96)					
Respuesta		**mb1-mb2**	**mb1-mi1**	**mb1-mi2**	**mb2-mi1**	**mb2-mi2**	**mi1-mi2**
Aplicación	pest	0.27	0.20	0.15	0.30	0.24	0.18
	sp	0.07	0.06	0.05	0.07	0.06	0.06
	z=	**-2.95**	**-0.96**	**0.72**	**1.97**	**0.61**	**0.66**
Conclusión		Rechazar	Aceptar	Aceptar	Rechazar	Aceptar	Aceptar
Dominio Imagen	pest	0.03	0.12	0.15	0.13	0.09	0.18
	sp	0.03	0.05	0.05	0.05	0.04	0.06
	z=	**-0.76**	**-4.11**	**-2.13**	**-3.65**	**-2.70**	**-1.98**
Conclusión		Aceptar	Rechazar	Rechazar	Rechazar	Rechazar	Rechazar
Otras	pest	0.15	0.10	0.09	0.09	0.08	0.02
	sp	0.05	0.05	0.04	0.04	0.04	0.02
	z=	**0.57**	**3.20**	**3.70**	**2.74**	**4.02**	**7.14**
Conclusión		**Aceptar**	**Rechazar**	**Rechazar**	Rechazar	Rechazar	Rechazar
No respondio	pest	0.45	0.50	0.51	0.35	0.37	0.41
	sp	0.07	0.08	0.07	0.07	0.07	0.07
	z=	**3.92**	**2.68**	**2.40**	**-1.19**	**2.52**	**2.40**
Conclusión		**Rechazar**	**Rechazar**	**Rechazar**	Aceptar	**Rechazar**	**Rechazar**

Cuadro No. 39 Distribución de resultados por Tipo de identificación para la pregunta 4B y Curso

RESPUESTA		Curso (IDC)				Total
		MB1	MB2	MI1	MI2	
Correcta	Frecuencia	42	65	52	71	230
	% entre IDC	47.7%	69.9%	62.7%	67.6%	62.3%
	% del total	11.4%	17.6%	14.1%	19.2%	62.3%
Incorrecta	Frecuencia	13	19	11	12	55
	% entre IDC	14.8%	20.4%	13.3%	11.4%	14.9%
	% del total	3.5%	5.1%	3.0%	3.3%	14.9%
No respondió	Frecuencia	33	9	20	22	84
	% entre IDC	37.5%	9.7%	24.1%	21.0%	22.8%
	% del total	8.9%	2.4%	5.4%	6.0%	22.8%
Total	Frecuencia	88	93	83	105	369
	% entre IDC	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% del total	23.8%	25.2%	22.5%	28.5%	100.0%

Cuadro No. 40 Distribución de resultados por Tipo de argumentación para la pregunta 4B y Curso

RESPUESTA		Curso (IDC)				Total
		MB1	MB2	MI1	MI2	
Aplicación	Frecuencia	21	40	29	15	105
	% entre IDC	23.9%	43.0%	34.9%	14.3%	28.5%
	% del total	5.7%	10.8%	7.9%	4.1%	28.5%
Expresión Algebraica	Frecuencia	1	1	4	1	7
	% entre IDC	1.1%	1.1%	4.8%	1.0%	1.9%
	% del total	.3%	.3%	1.1%	.3%	1.9%
Rep. Gráfica	Frecuencia		1	2	2	5
	% entre IDC		1.1%	2.4%	1.9%	1.4%
	% del total		.3%	.5%	.5%	1.4%
Dominio Imagen	Frecuencia	2	6	5	21	34
	% entre IDC	2.3%	6.5%	6.0%	20.0%	9.2%
	% del total	.5%	1.6%	1.4%	5.7%	9.2%
Variación Constancia	Frecuencia		5	4	18	27
	% entre IDC		5.4%	4.8%	17.1%	7.3%
	% del total		1.4%	1.1%	4.9%	7.3%
Número Imagen	Frecuencia			6	12	18
	% entre IDC			7.2%	11.4%	4.9%
	% del total			1.6%	3.3%	4.9%
Crecimiento Decrecimiento	Frecuencia		1			1
	% entre IDC		1.1%			.3%
	% del total		.3%			.3%
Resolución Problemas	Frecuencia		1		1	2
	% entre IDC		1.1%		1.0%	.5%
	% del total		.3%		.3%	.5%
Otras	Frecuencia	14	12	2	1	29
	% entre IDC	15.9%	12.9%	2.4%	1.0%	7.9%
	% del total	3.8%	3.3%	.5%	.3%	7.9%
No respondió	Frecuencia	50	26	31	34	141
	% entre IDC	56.8%	28.0%	37.3%	32.4%	38.2%
	% del total	13.6%	7.0%	8.4%	9.2%	38.2%
TOTAL	Frecuencia	88	93	83	105	369
	% entre IDC	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% del total	23.8%	25.2%	22.5%	28.5%	100.0%

Cuadro No. 41 Contraste de Hipótesis de diferencia de proporciones par la pregunta 4B entre Tipo de identificación y cursos

		Contraste de hipótesis diferencia de proporciones igual a cero entre respuestas observadas entre cursos para nivel de significación 5% z=+1.96)					
Respuesta		**mb1-mb2**	**mb1-mi1**	**mb1-mi2**	**mb2-mi1**	**mb2-mi2**	**mi1-mi2**
Correcta	pest	0.59	0.55	0.59	0.66	0.69	0.65
	sp	0.07	0.08	0.07	0.07	0.07	0.07
	z=	**-3.03**	**-1.96**	**-2.79**	**1.02**	**-3.01**	**-2.85**
Conclusión		Rechazar	Rechazar	Rechazar	Aceptar	Rechazar	Rechazar
Incorrecta	pest	0.18	0.14	0.13	0.17	0.16	0.12
	sp	0.06	0.05	0.05	0.06	0.05	0.05
	z=	**-1.00**	**0.29**	**0.69**	**1.26**	**0.65**	**0.69**
Conclusión		Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar
No respondio	pest	0.23	0.31	0.28	0.16	0.16	0.22
	sp	0.06	0.07	0.07	0.06	0.05	0.06
	z=	**4.43**	**1.89**	**2.54**	**-2.57**	**3.20**	**2.70**
Conclusión		**Rechazar**	**Aceptar**	**Rechazar**	Rechazar	**Rechazar**	**Rechazar**

Cuadro No. 42 Contraste de Hipótesis de diferencia de proporciones par la pregunta 4B entre Tipo de argumentación y cursos

		Contraste de hipótesis diferencia de proporciones igual a cero entre respuestas observadas entre cursos para nivel de significación 5% z=±1.96)					
Respuesta		**mb1-mb2**	**mb1-mi1**	**mb1-mi2**	**mb2-mi1**	**mb2-mi2**	**mi1-mi2**
Aplicación	pest	0.34	0.29	0.19	0.39	0.28	0.23
	sp	0.07	0.07	0.06	0.07	0.06	0.06
	z=	**-2.72**	**-1.59**	**1.70**	**1.09**	**1.50**	**1.54**
Conclusión		Rechazar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar
Dominio Imagen	pest	0.04	0.04	0.12	0.06	0.14	0.14
	sp	0.03	0.03	0.05	0.04	0.05	0.05
	z=	**-1.37**	**-1.24**	**-3.79**	**0.12**	**-3.63**	**-3.50**
Conclusión		Aceptar	Aceptar	Rechazar	Aceptar	Rechazar	Rechazar
Otras	pest	0.14	0.09	0.08	0.08	0.07	0.02
	sp	0.05	0.04	0.04	0.04	0.04	0.02
	z=	**0.58**	**3.03**	**3.87**	**2.57**	**4.24**	**8.13**
Conclusión		**Aceptar**	**Rechazar**	**Rechazar**	Rechazar	Rechazar	Rechazar
No respondio	pest	0.42	0.47	0.44	0.32	0.30	0.35
	sp	0.07	0.08	0.07	0.07	0.07	0.07
	z=	**3.93**	**2.55**	**3.41**	**-1.33**	**3.73**	**3.50**
Conclusión		**Rechazar**	**Rechazar**	**Rechazar**	Aceptar	**Rechazar**	**Rechazar**

Cuadro No. 43 Distribución de resultados por Tipo de identificación para la pregunta 4C y Curso

RESPUESTA		Curso (IDC)				Total
		MB1	MB2	MI1	MI2	
Correcta	Frecuencia	32	58	51	73	214
	% entre IDC	36.4%	62.4%	61.4%	69.5%	58.0%
	% del total	8.7%	15.7%	13.8%	19.8%	58.0%
Incorrecta	Frecuencia	19	26	10	10	65
	% entre IDC	21.6%	28.0%	12.0%	9.5%	17.6%
	% del total	5.1%	7.0%	2.7%	2.7%	17.6%
No respondió	Frecuencia	37	9	22	22	90
	% entre IDC	42.0%	9.7%	26.5%	21.0%	24.4%
	% del total	10.0%	2.4%	6.0%	6.0%	24.4%
Total	Frecuencia	88	93	83	105	369
	% entre IDC	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% del total	23.8%	25.2%	22.5%	28.5%	100.0%

Cuadro No. 44 Distribución de resultados por Tipo de argumentación para la pregunta 4C y Curso

RESPUESTA		Curso (IDC)				Total
		MB1	MB2	MI1	MI2	
Aplicación	Frecuencia	5	14	5	6	30
	% entre IDC	5.7%	15.1%	6.0%	5.7%	8.1%
	% del total	1.4%	3.8%	1.4%	1.6%	8.1%
Expresión Algebraica	Frecuencia	1	8	4	6	19
	% entre IDC	1.1%	8.6%	4.8%	5.7%	5.1%
	% del total	.3%	2.2%	1.1%	1.6%	5.1%
Rep. Gráfica	Frecuencia		2	1	2	5
	% entre IDC		2.2%	1.2%	1.9%	1.4%
	% del total		.5%	.3%	.5%	1.4%
Dominio Imagen	Frecuencia	6	6		12	24
	% entre IDC	6.8%	6.5%		11.4%	6.5%
	% del total	1.6%	1.6%		3.3%	6.5%
Variación Constancia	Frecuencia	11	13	13	34	71
	% entre IDC	12.5%	14.0%	15.7%	32.4%	19.2%
	% del total	3.0%	3.5%	3.5%	9.2%	19.2%
Ecuación	Frecuencia	1				1
	% entre IDC	1.1%				.3%
	% del total	.3%				.3%
Número Imagen	Frecuencia			2	2	4
	% entre IDC			2.4%	1.9%	1.1%
	% del total			.5%	.5%	1.1%
Crecimiento Decrecimiento	Frecuencia		4	2	2	8
	% entre IDC		4.3%	2.4%	1.9%	2.2%
	% del total		1.1%	.5%	.5%	2.2%
Resolución Problemas	Frecuencia	1	7	17	2	27
	% entre IDC	1.1%	7.5%	20.5%	1.9%	7.3%
	% del total	.3%	1.9%	4.6%	.5%	7.3%
Otras	Frecuencia	11	21	1	1	34
	% entre IDC	12.5%	22.6%	1.2%	1.0%	9.2%
	% del total	3.0%	5.7%	.3%	.3%	9.2%
No respondió	Frecuencia	52	18	38	38	146
	% entre IDC	59.1%	19.4%	45.8%	36.2%	39.6%
	% del total	14.1%	4.9%	10.3%	10.3%	39.6%
TOTAL	Frecuencia	88	93	83	105	369
	% entre IDC	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% del total	23.8%	25.2%	22.5%	28.5%	100.0%

Cuadro No. 45 Contraste de Hipótesis de diferencia de proporciones par la pregunta 4C entre Tipo de identificación y cursos

		Contraste de hipótesis diferencia de proporciones igual a cero entre respuestas observadas entre cursos para nivel de significación 5% z=±1.96)					
Respuesta		**mb1-mb2**	**mb1-mi1**	**mb1-mi2**	**mb2-mi1**	**mb2-mi2**	**mi1-mi2**
Correcta	pest	0.50	0.49	0.54	0.62	0.66	0.66
	sp	0.07	0.08	0.07	0.07	0.07	0.07
	z=	**-3.50**	**-3.28**	**-4.61**	**0.13**	**-4.92**	**-4.76**
Conclusión		Rechazar	Rechazar	Rechazar	Aceptar	Rechazar	Rechazar
Incorrecta	pest	0.25	0.17	0.15	0.20	0.18	0.11
	sp	0.06	0.06	0.05	0.06	0.05	0.05
	z=	**-0.99**	**1.66**	**2.34**	**2.61**	**2.20**	**2.66**
Conclusión		Aceptar	Aceptar	Rechazar	Rechazar	Rechazar	Rechazar
No respondio	pest	0.25	0.35	0.31	0.18	0.16	0.23
	sp	0.06	0.07	0.07	0.06	0.05	0.06
	z=	**5.00**	**2.14**	**3.17**	**-2.93**	**4.08**	**3.39**
Conclusión		**Rechazar**	**Rechazar**	**Rechazar**	Rechazar	**Rechazar**	**Rechazar**

Cuadro No. 46 Contraste de Hipótesis de diferencia de proporciones par la pregunta 4C entre Tipo de argumentación y cursos

		Contraste de hipótesis diferencia de proporciones igual a cero entre respuestas observadas entre cursos para nivel de significación 5% z=±1.96)					
Respuesta		**mb1-mb2**	**mb1-mi1**	**mb1-mi2**	**mb2-mi1**	**mb2-mi2**	**mi1-mi2**
Aplicación	pest	0.10	0.06	0.06	0.11	0.10	0.06
	sp	0.05	0.04	0.03	0.05	0.04	0.03
	z=	**-2.06**	**-0.10**	**-0.01**	**1.93**	**-0.01**	**-0.01**
Conclusión		Rechazar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar
Var Constancia	pest	0.13	0.14	0.23	0.15	0.24	0.25
	sp	0.05	0.05	0.06	0.05	0.06	0.06
	z=	**-0.29**	**-0.60**	**-3.25**	**-0.31**	**-3.28**	**-3.13**
Conclusión		Aceptar	Aceptar	Rechazar	Aceptar	Rechazar	Rechazar
Otras	pest	0.18	0.07	0.06	0.13	0.11	0.01
	sp	0.06	0.04	0.03	0.05	0.04	0.02
	z=	**-1.78**	**2.89**	**3.31**	**4.28**	**2.58**	**7.66**
Conclusión		**Aceptar**	**Rechazar**	**Rechazar**	Rechazar	Rechazar	Rechazar
No respondio	pest	0.39	0.53	0.47	0.32	0.28	0.40
	sp	0.07	0.08	0.07	0.07	0.06	0.07
	z=	**5.49**	**1.74**	**3.18**	**-3.76**	**3.57**	**3.18**
Conclusión		**Rechazar**	**Aceptar**	**Rechazar**	Rechazar	**Rechazar**	**Rechazar**

Cuadro No. 47 Distribución de resultados por Tipo de identificación para la pregunta 4D y Curso

RESPUESTA		Curso (IDC)				Total
		MB1	MB2	MI1	MI2	
Correcta	Frecuencia	23	42	24	36	125
	% entre IDC	26.1%	45.2%	28.9%	34.3%	33.9%
	% del total	6.2%	11.4%	6.5%	9.8%	33.9%
Incorrecta	Frecuencia	28	37	35	36	136
	% entre IDC	31.8%	39.8%	42.2%	34.3%	36.9%
	% del total	7.6%	10.0%	9.5%	9.8%	36.9%
No respondió	Frecuencia	37	14	24	33	108
	% entre IDC	42.0%	15.1%	28.9%	31.4%	29.3%
	% del total	10.0%	3.8%	6.5%	8.9%	29.3%
Total	Frecuencia	88	93	83	105	369
	% entre IDC	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% del total	23.8%	25.2%	22.5%	28.5%	100.0%

Cuadro No. 48 Distribución de resultados por Tipo de argumentación para la pregunta 4D y Curso

RESPUESTA		Curso (IDC)				Total
		MB1	MB2	MI1	MI2	
Aplicación	Frecuencia	19	42	20	12	93
	% entre IDC	21.6%	45.2%	24.1%	11.4%	25.2%
	% del total	5.1%	11.4%	5.4%	3.3%	25.2%
Expresión Algebraica	Frecuencia		5	2	4	11
	% entre IDC		5.4%	2.4%	3.8%	3.0%
	% del total		1.4%	.5%	1.1%	3.0%
Rep. Gráfica	Frecuencia		1		2	3
	% entre IDC		1.1%		1.9%	.8%
	% del total		.3%		.5%	.8%
Dominio Imagen	Frecuencia	3		12	10	25
	% entre IDC	3.4%		14.5%	9.5%	6.8%
	% del total	.8%		3.3%	2.7%	6.8%
Variación Constancia	Frecuencia	2	2	5	12	21
	% entre IDC	2.3%	2.2%	6.0%	11.4%	5.7%
	% del total	.5%	.5%	1.4%	3.3%	5.7%
Número Imagen	Frecuencia		1	5	13	19
	% entre IDC		1.1%	6.0%	12.4%	5.1%
	% del total		.3%	1.4%	3.5%	5.1%
Crecimiento Decrecimiento	Frecuencia		1	1	1	3
	% entre IDC		1.1%	1.2%	1.0%	.8%
	% del total		.3%	.3%	.3%	.8%
Otras	Frecuencia	11	18	5	3	37
	% entre IDC	12.5%	19.4%	6.0%	2.9%	10.0%
	% del total	3.0%	4.9%	1.4%	.8%	10.0%
No respondió	Frecuencia	53	23	33	48	157
	% entre IDC	60.2%	24.7%	39.8%	45.7%	42.5%
	% del total	14.4%	6.2%	8.9%	13.0%	42.5%
TOTAL	Frecuencia	88	93	83	105	369
	% entre IDC	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
	% del total	23.8%	25.2%	22.5%	28.5%	100.0%

Cuadro No. 49 Contraste de Hipótesis de diferencia de proporciones par la pregunta 4D entre Tipo de identificación y cursos

		Contraste de hipótesis diferencia de proporciones igual a cero entre respuestas observadas entre cursos para nivel de significación 5% z=±1.96)					
Respuesta		**mb1-mb2**	**mb1-mi1**	**mb1-mi2**	**mb2-mi1**	**mb2-mi2**	**mi1-mi2**
Correcta	pest	0.36	0.27	0.31	0.38	0.39	0.32
	sp	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07
	z=	**-2.67**	**-0.41**	**-1.22**	**2.22**	**-1.17**	**-1.19**
Conclusión		Aceptar	Aceptar	Aceptar	Rechazar	Aceptar	Aceptar
Incorrecta	pest	0.36	0.37	0.33	0.41	0.37	0.38
	sp	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07
	z=	**-1.12**	**-1.40**	**-0.36**	**-0.32**	**-0.36**	**-0.35**
Conclusión		Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar	Aceptar
No respondio	pest	0.28	0.36	0.36	0.22	0.24	0.30
	sp	0.07	0.07	0.07	0.06	0.06	0.07
	z=	**4.03**	**1.79**	**1.53**	**-2.23**	**1.75**	**1.57**
Conclusión		**Rechazar**	**Aceptar**	**Aceptar**	Rechazar	**Aceptar**	**Aceptar**

Cuadro No. 50 Contraste de Hipótesis de diferencia de proporciones par la pregunta 4D entre Tipo de argumentación y cursos

		Contraste de hipótesis diferencia de proporciones igual a cero entre respuestas observadas entre cursos para nivel de significación 5% z=+1.96)					
Respuesta		**mb1-mb2**	**mb1-mi1**	**mb1-mi2**	**mb2-mi1**	**mb2-mi2**	**mi1-mi2**
Aplicación	pest	0.34	0.23	0.16	0.35	0.27	0.17
	sp	0.07	0.06	0.05	0.07	0.06	0.06
	z=	**-3.35**	**-0.39**	**1.92**	**2.92**	**1.60**	**1.84**
Conclusión		Rechazar	Aceptar	Aceptar	Rechazar	Aceptar	Aceptar
Dominio Imagen	pest	0.02	0.09	0.07	0.07	0.05	0.12
	sp	0.02	0.04	0.04	0.04	0.03	0.05
	z=	**1.80**	**-2.55**	**-1.69**	**-3.80**	**-1.96**	**-1.30**
Conclusión		Aceptar	Rechazar	Aceptar	Rechazar	Rechazar?	Aceptar
Otras	pest	0.16	0.09	0.07	0.13	0.11	0.04
	sp	0.05	0.04	0.04	0.05	0.04	0.03
	z=	**-1.26**	**1.45**	**2.57**	**2.62**	**2.20**	**3.25**
Conclusión		**Aceptar**	**Aceptar**	**Rechazar**	Rechazar	Rechazar	Rechazar
No respondio	pest	0.42	0.50	0.52	0.32	0.36	0.43
	sp	0.07	0.08	0.07	0.07	0.07	0.07
	z=	**4.84**	**2.68**	**2.01**	**-2.14**	**2.13**	**2.00**
Conclusión		**Rechazar**	**Rechazar**	**Rechazar**	Rechazar	**Rechazar**	**Rechazar**